

ZLATÝ ŘEZ

Geometrie má dva poklady:
Pythagorovu větu a zlatý řez.

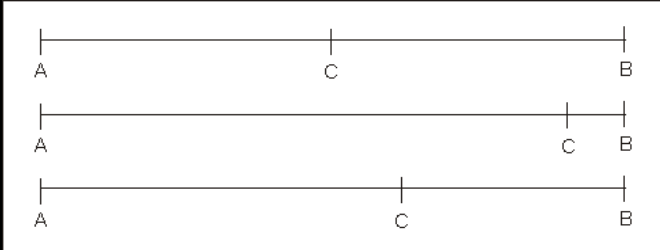
První má cenu zlata,
druhý připomíná spíše
drahocenný kámen.

Johannes
Kepler

Mgr. Zuzana Štauberová, katedra matematiky FAV ZČU v Plzni, zuzana@kma.zcu.cz

ZLATÝ ŘEZ – dělení úsečky

Rozdělte úsečku AB na dvě nestejně velké části

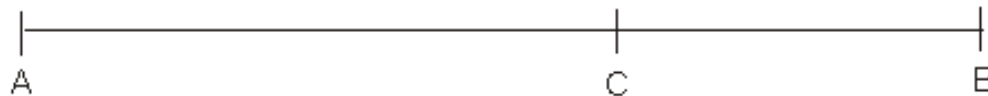


- skoro střed - znepokojující
- velké utlačuje malé
- vyvážené tak akorát :-)

Definice

Zlatý řez je kladné číslo, které vyjadřuje poměr (podíl) dvou úseček a je definován takto:
Bod C dělí úsečku AB v poměru zlatého řezu, jestliže platí:

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|BC|}$$

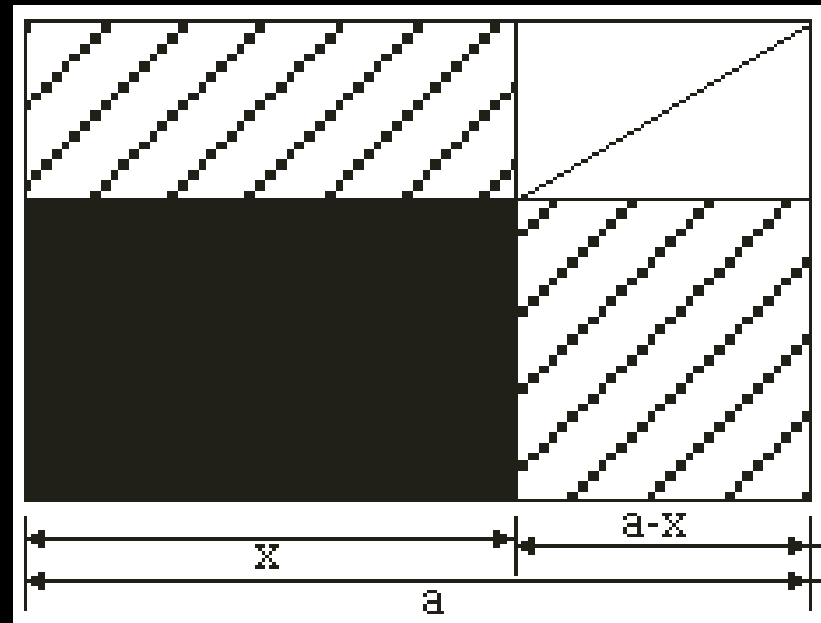
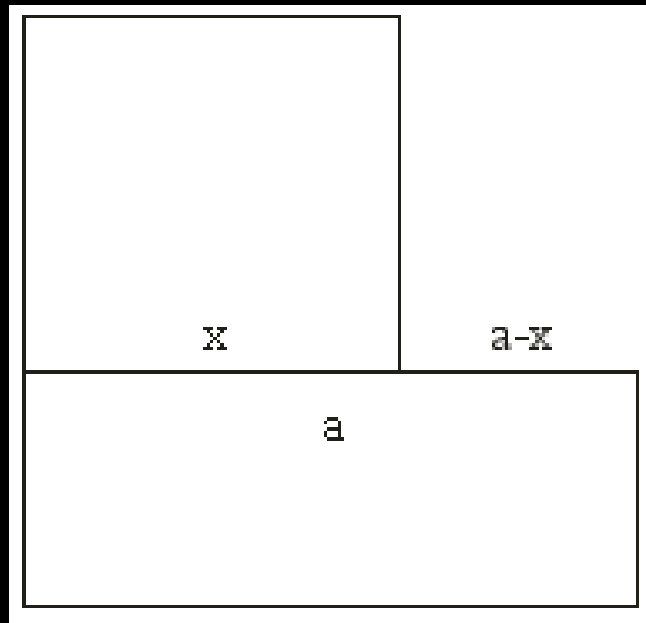


ZLATÝ ŘEZ – vývoj pojmenování

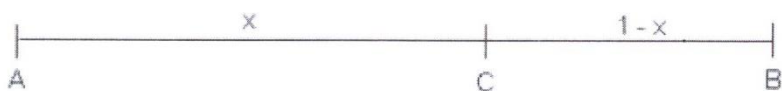
- Egypt – Rhindův papyrus (okolo -1500):
- V pyramidách je ukryt tajemný kvocient „seqt“
- Řecko – Pythagorejci – harmonii vesmíru lze vyjádřit čísly, pentagram
- Platón – pravidelná tělesa, Euklides – Základy „střední a krajní poměr“
- Fibonacci (okolo 1200)
- Renesance – Luca Pacioli , Leonardo da Vinci, „božský poměr“
Piero della Francesca, Albrecht Dürer (divina proportio)
- Jacques Bernoulli, Johannes Kepler, René Descartes
- 19. století - „zlatý“ - zlatý řez, zlaté číslo, zlatá spirála
- Počátek 20. století - φ , Φ , (The PHI ratio) – podle řeckého sochaře Feidia

ZLATÝ ŘEZ – úloha z Euklidovy knihy „Základy“

Rozdělte danou úsečku na dvě nestejně části tak, aby čtverec sestrojený nad větší částí měl stejný obsah jako pravoúhelník, jehož jedna strana má délku menší části a druhá má délku celé úsečky.



ZLATÝ ŘEZ - výpočet



Zvolíme $|AB| = 1$

$|AC|$ označíme x , potom je $|BC| = 1 - x$

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,61803398\dots$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -1,61803398\dots$$

Hodnotu zlatého řezu tedy vyjadřuje číslo:

$$\Phi = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{0,61803398\dots} = 1,61803398\dots$$

Zajímavé $x_1 = \frac{-1}{x_2} \quad x_1 \cdot x_2 = -1$

Druhý kořen rovnice x_2 je záporné číslo, tedy nemůže vyjadřovat velikost úsečky, proto ho nebudeme uvažovat.

Označení zlatého řezu: písmena řecké abecedy ϕ nebo Φ (dříve τ – tome)

ZLATÝ ŘEZ – vlastnosti čísla Φ

$$\Phi = 1,61803398\dots$$

$$\Phi^2 = 2,61803398\dots = \Phi + 1$$

$$\frac{1}{\Phi} = 0,61803398\dots = \Phi - 1$$

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

↓

$$x = 1,61803398\dots = \Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

$$x^2 = x + 1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

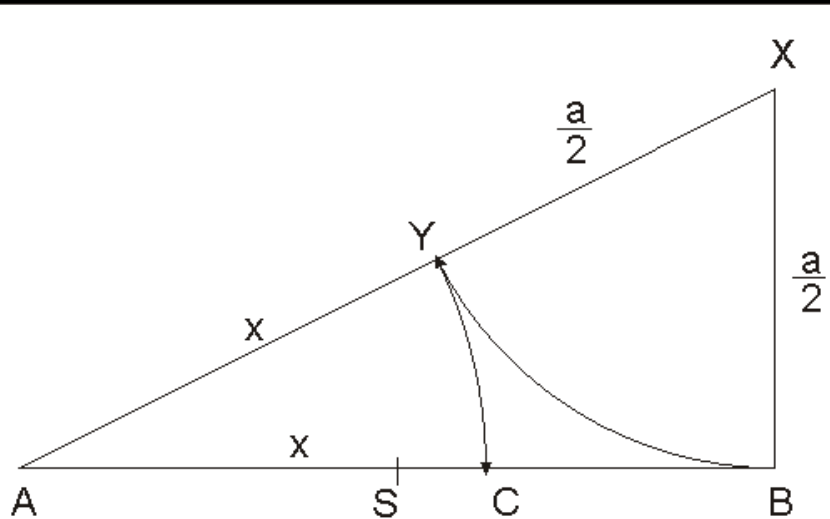
⇔

$$x = 1,61803398\dots = \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Řetězový zlomek obsahuje pouze jedničky $\Rightarrow$ konverguje velmi pomalu.
V tomto smyslu se dá říci, že číslo Φ se dá pomocí zlomku vyjádřit
obtížněji než ostatní iracionální čísla $\Rightarrow$ číslo Φ je ze všech iracionálních
čísel to “nejiracionálnější”.

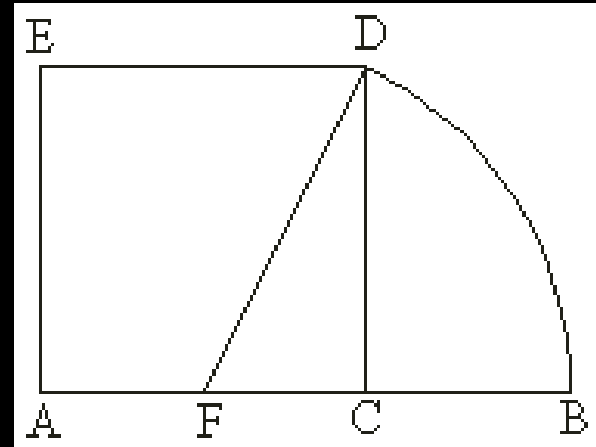
ZLATÝ ŘEZ - konstrukce

Znám celou úsečku AB, hledám bod C

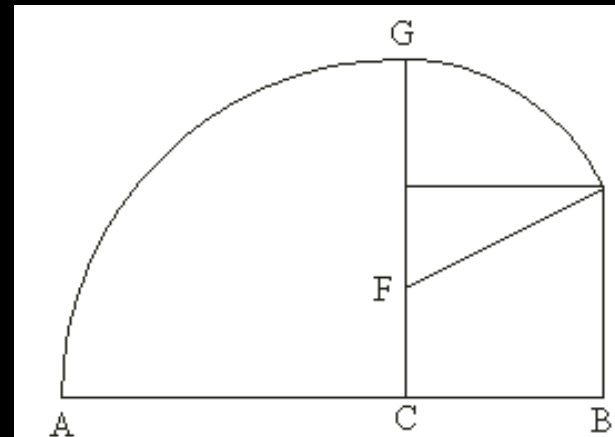


1. $|AB| = a$
2. S - střed úsečky AB, $|SA| = |SB| = \frac{a}{2}$
3. X: $XB \perp AB$, $|XB| = \frac{a}{2}$
4. Y: $Y \in AX$, $|YX| = \frac{a}{2}$, $|YA| = x$
5. C: $C \in AB$, $|AC| = x$

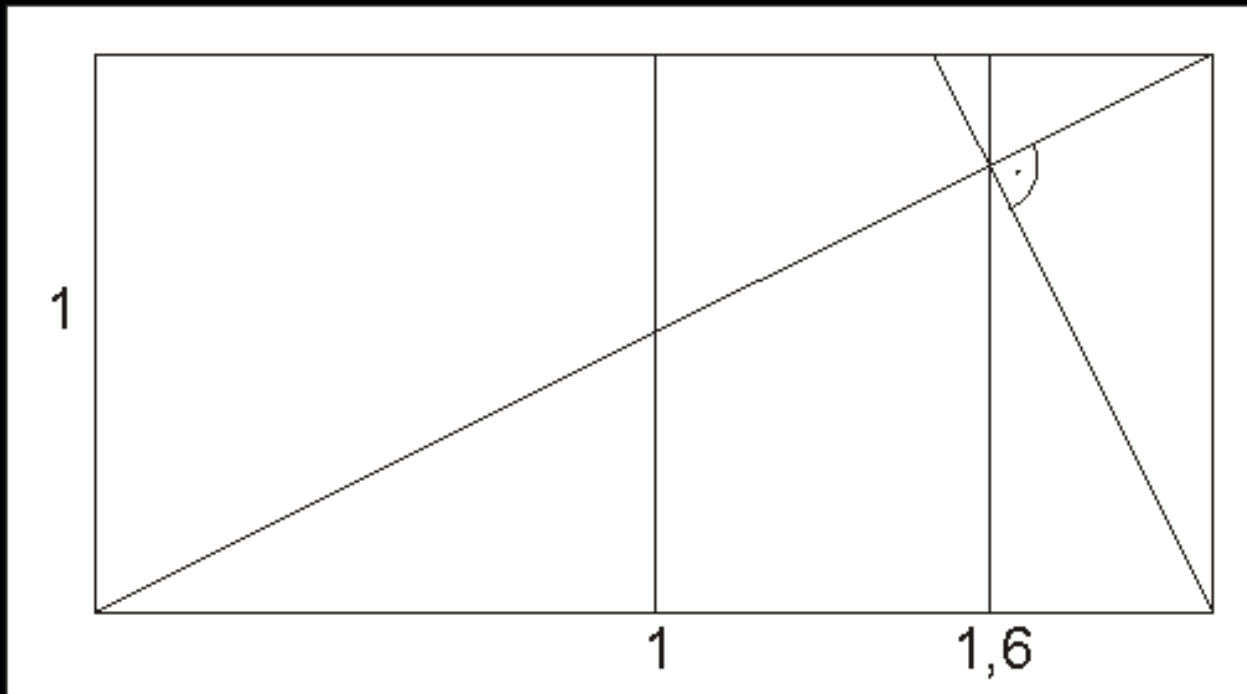
Znám větší díl AC, hledám AB



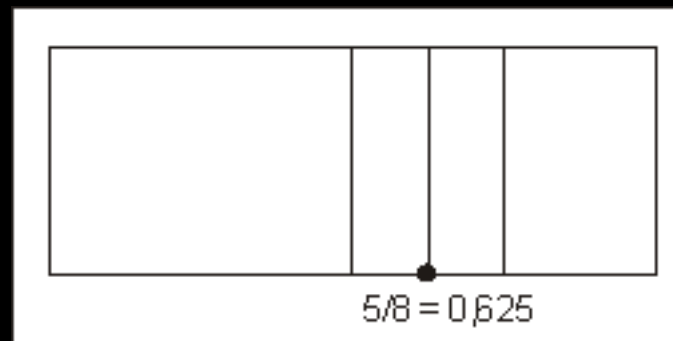
Znám menší díl CB, hledám AB



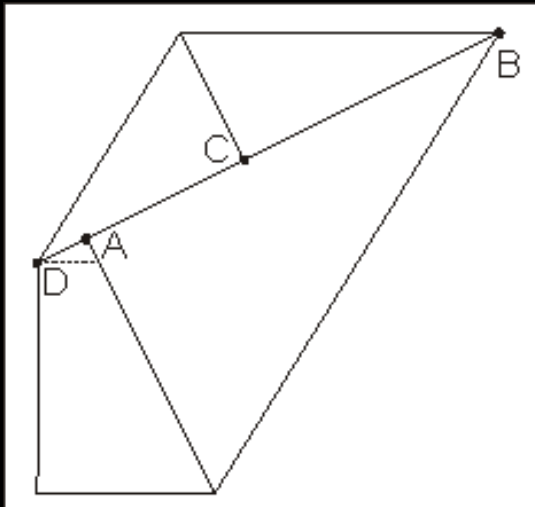
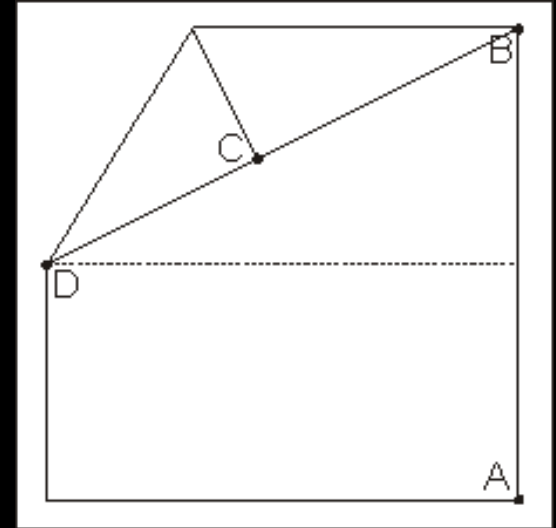
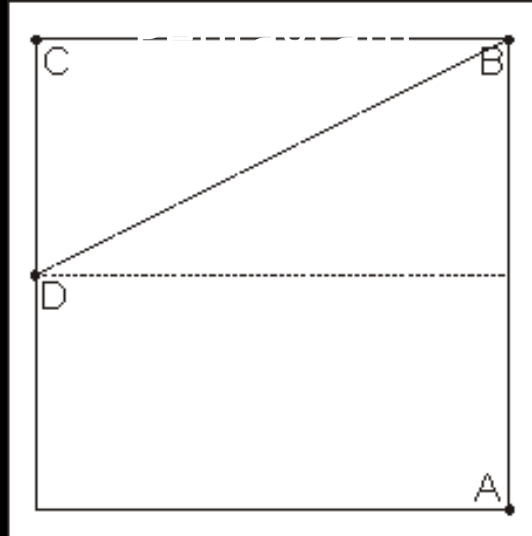
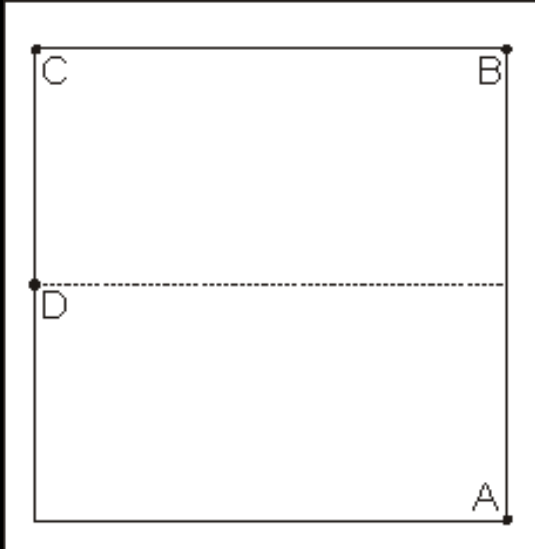
ZLATÝ ŘEZ – přibližné konstrukce



$\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$
(Fibonacci)

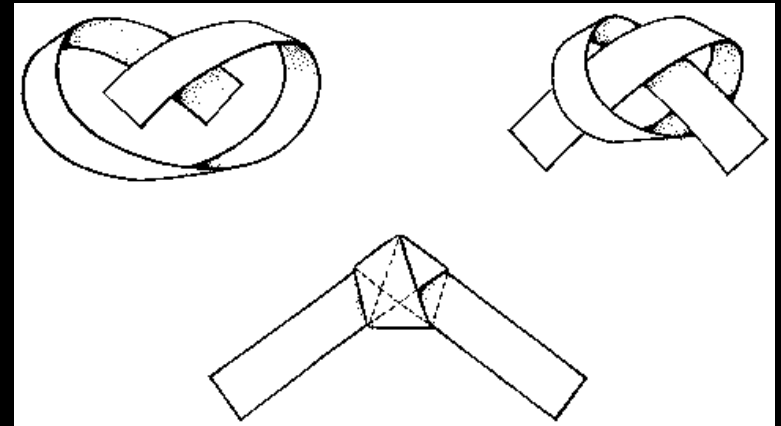


ZLATÝ ŘEZ – skládání z papíru



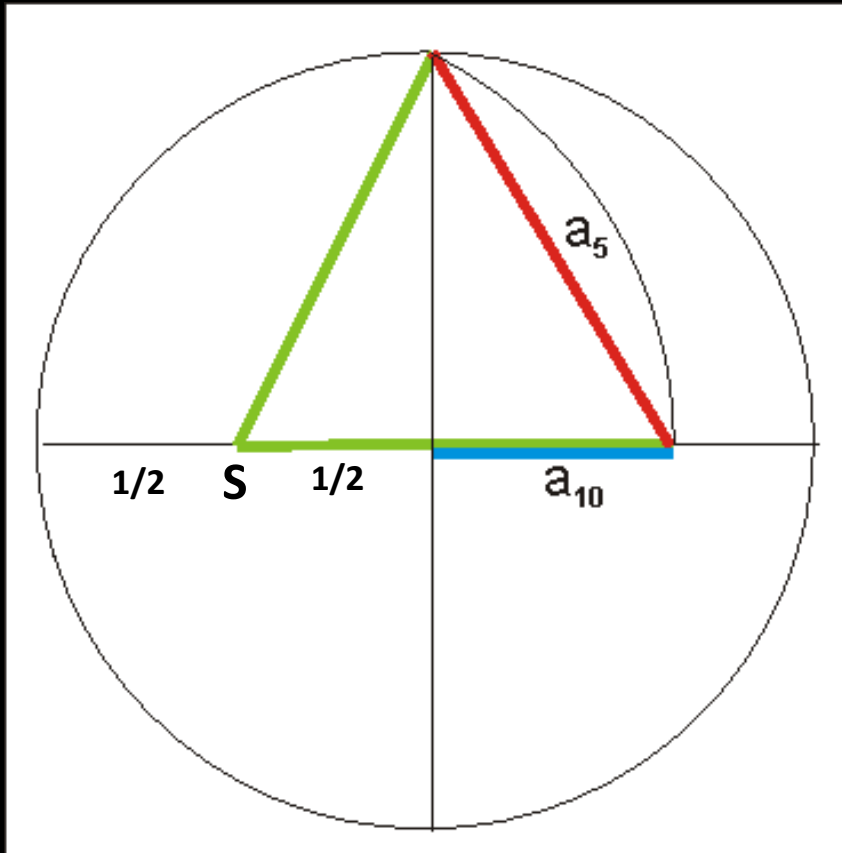
Zlatý řez

$$\left| \frac{AB}{CB} \right| = \left| \frac{CB}{AC} \right| = \varphi$$

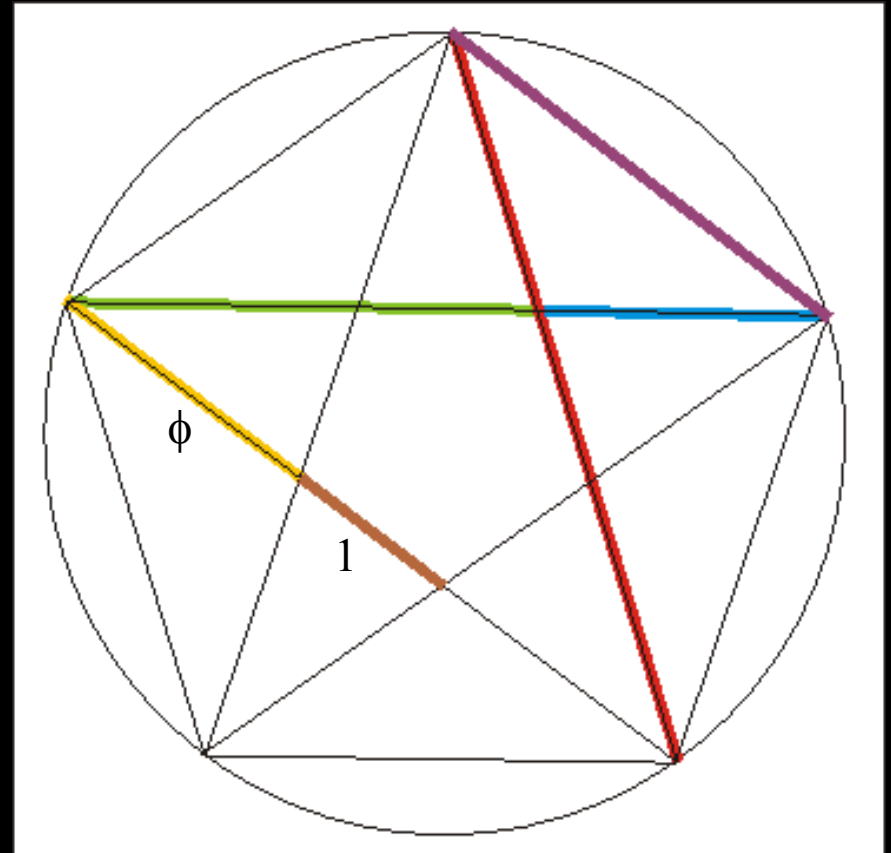


Pentagram

ZLATÝ ŘEZ - pentagram

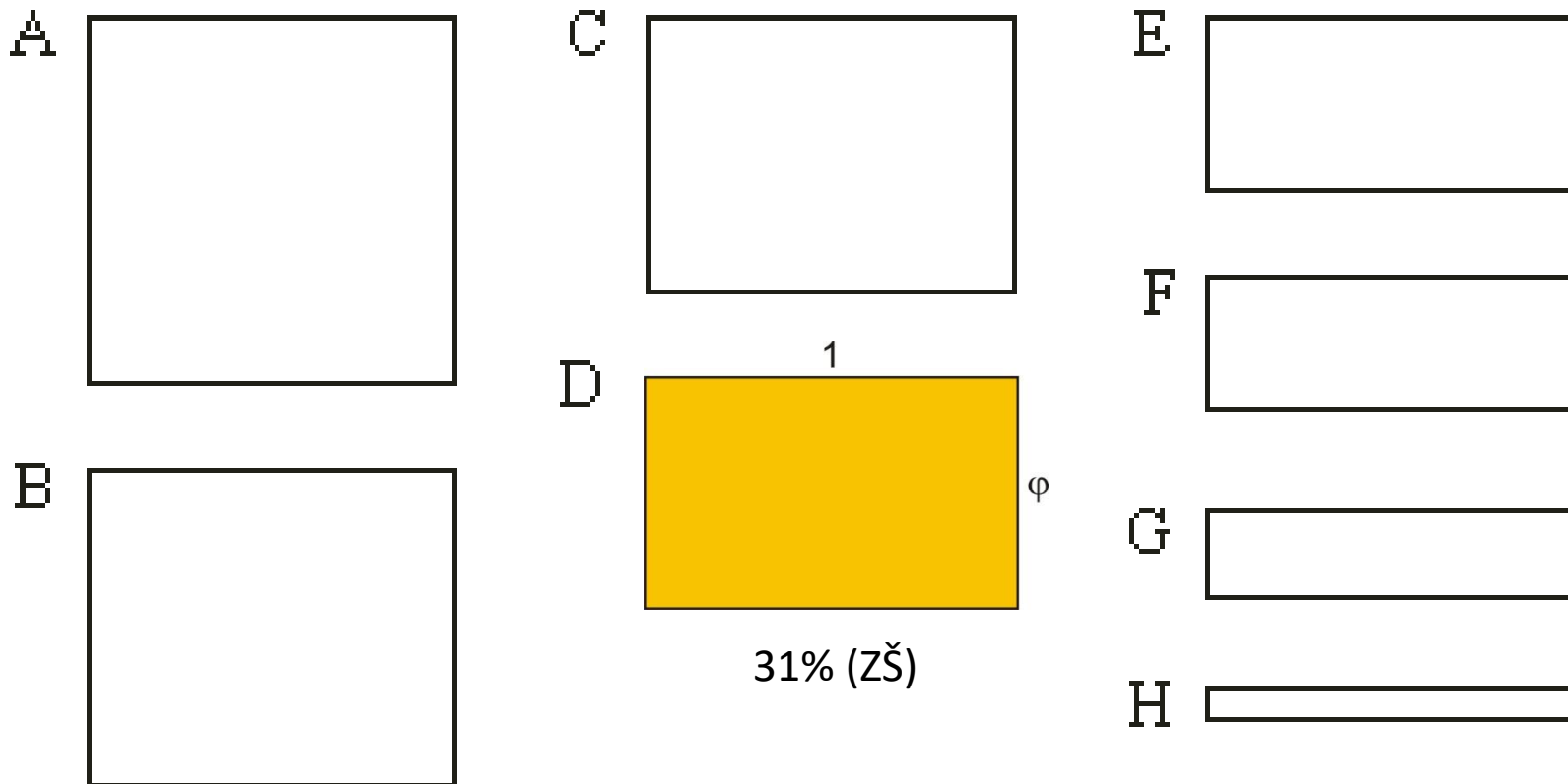


Konstrukce délky strany:
pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka

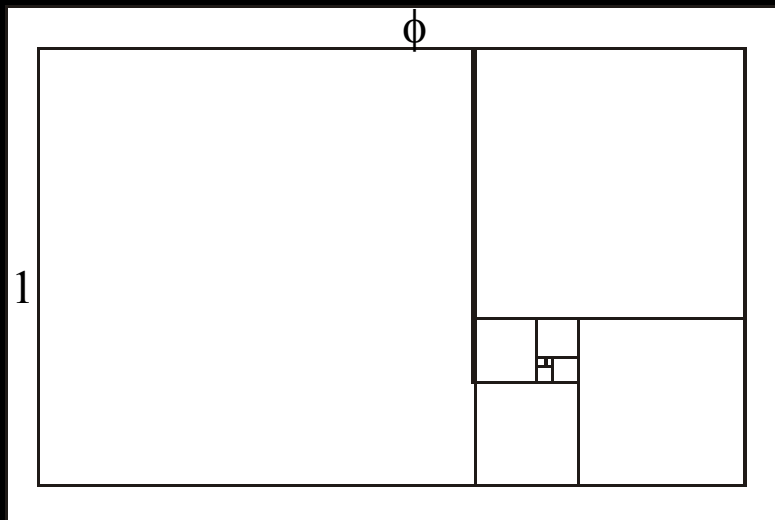


Pravidelný pětiúhelník – magický obrazec

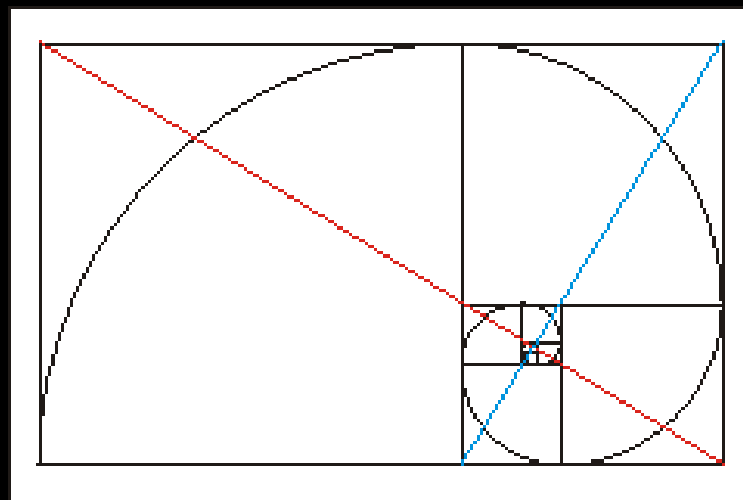
ZLATÝ ŘEZ – nejkrásnější obdélník



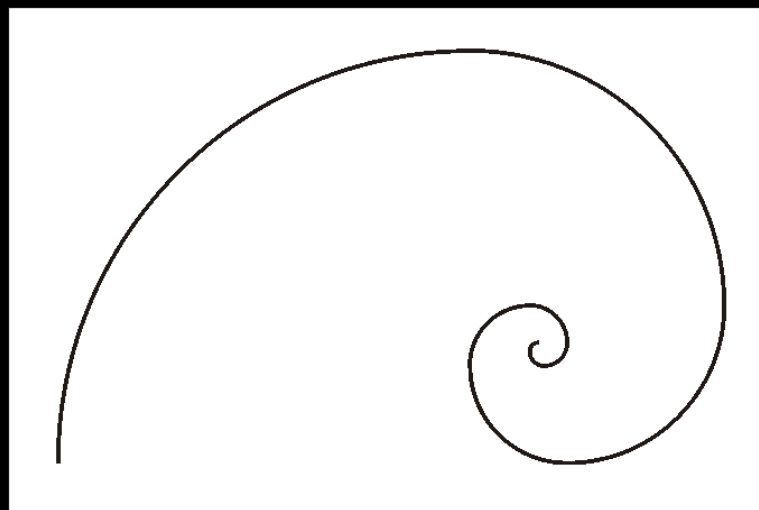
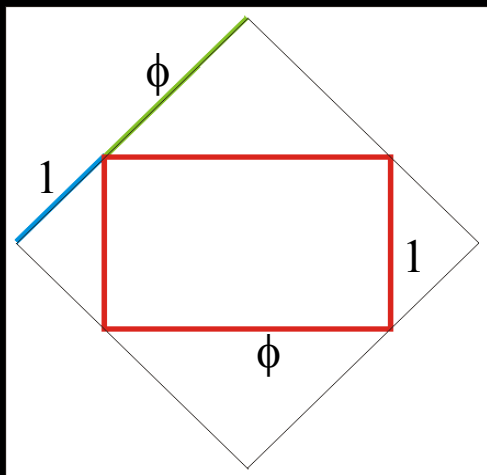
ZLATÝ ŘEZ – zlatý obdélník



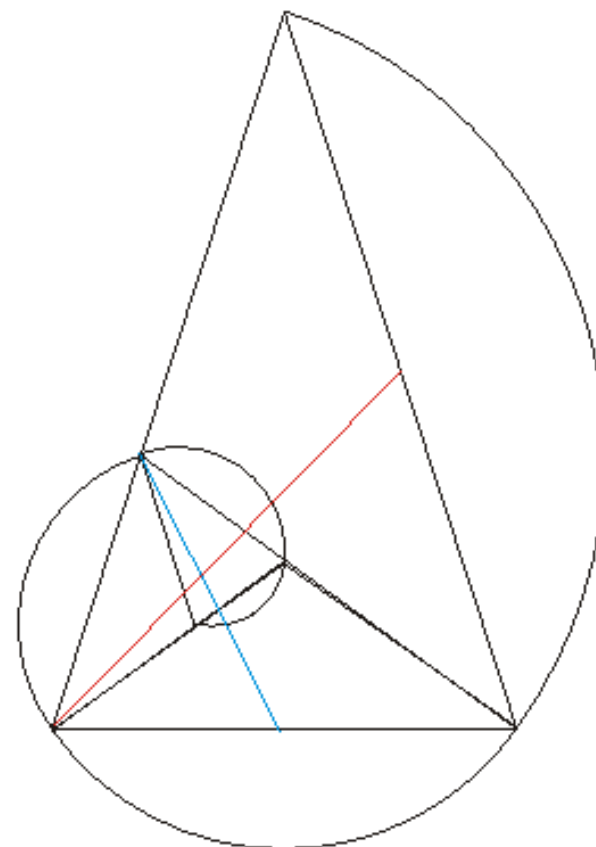
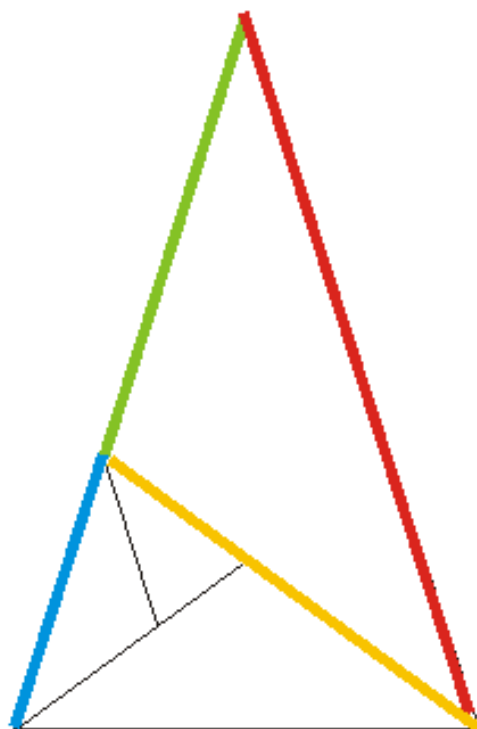
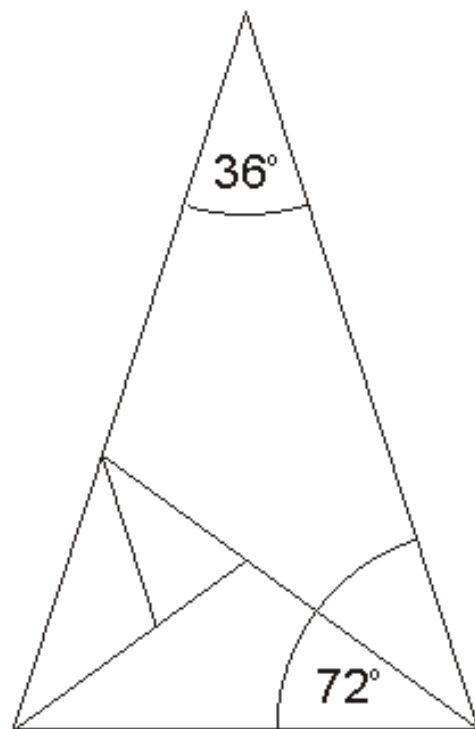
Poměr velikostí stran zlatého obdélníka je ϕ .
(gnómon)



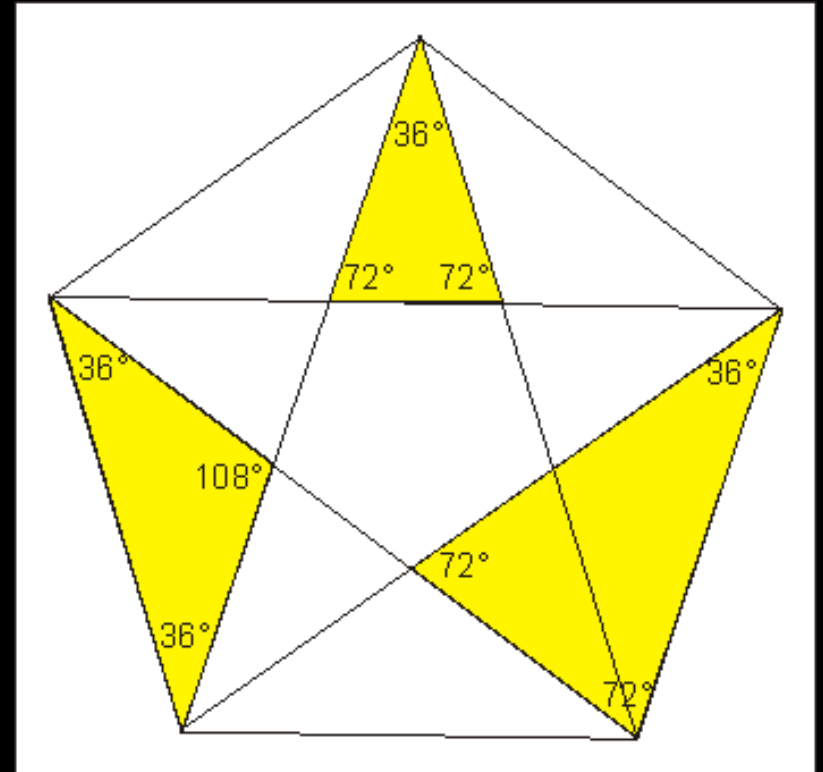
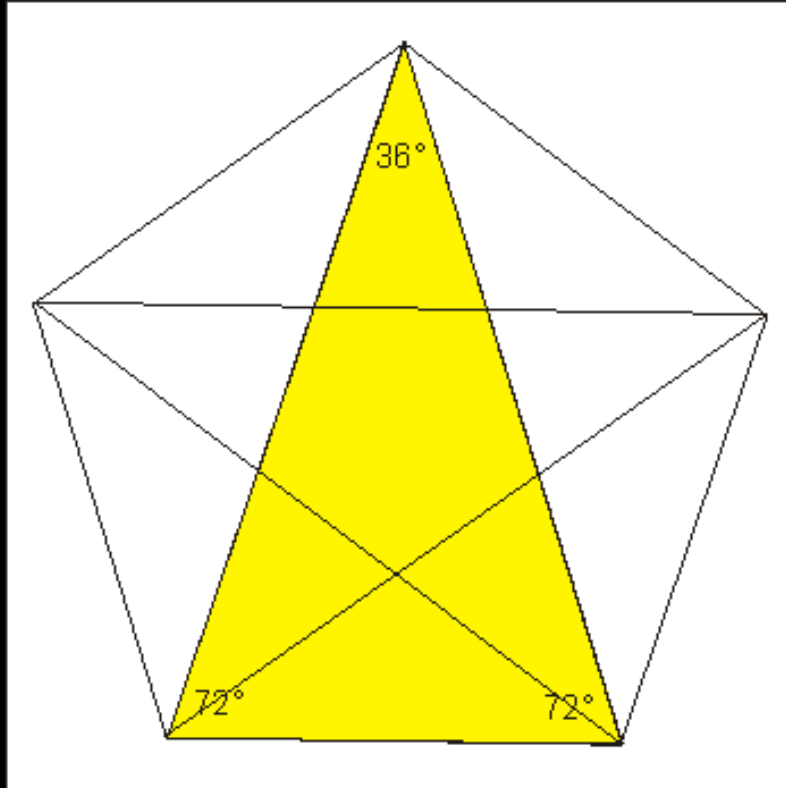
Přibližná konstrukce logaritmické (zlaté) spirály



ZLATÝ ŘEZ – zlatý trojúhelník



ZLATÝ ŘEZ – zlatý trojúhelník

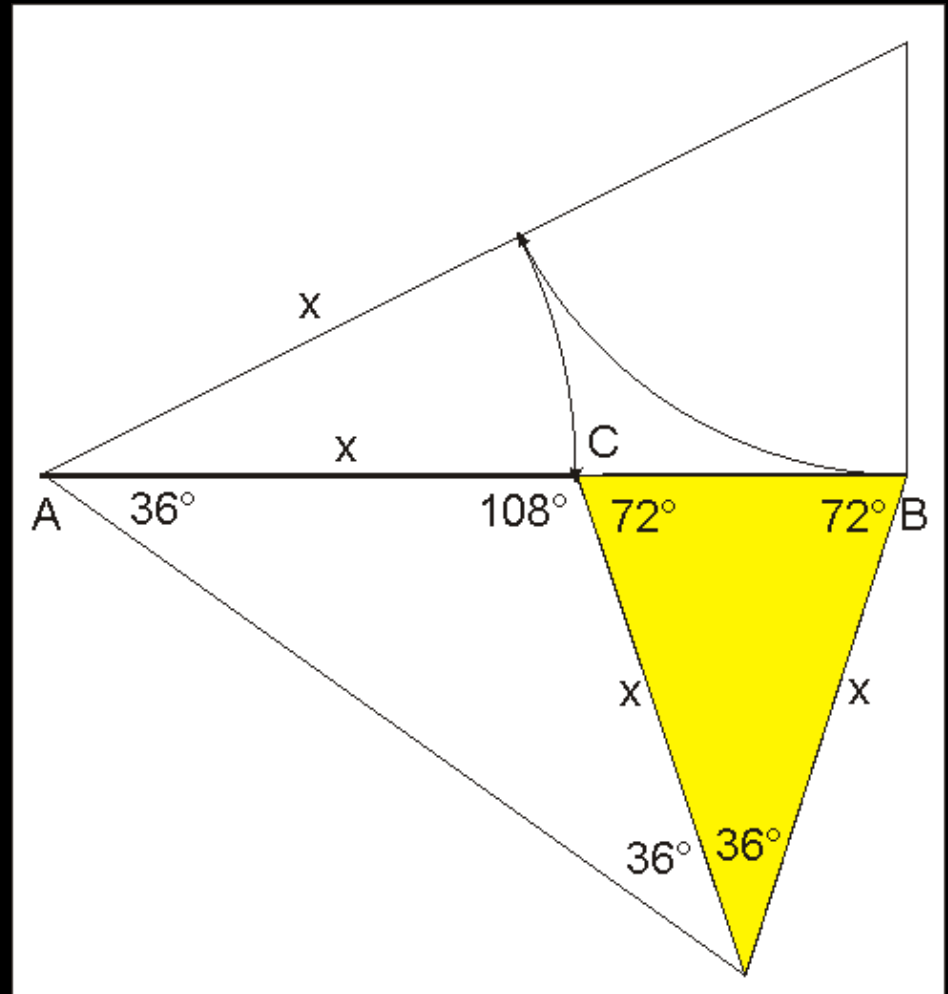
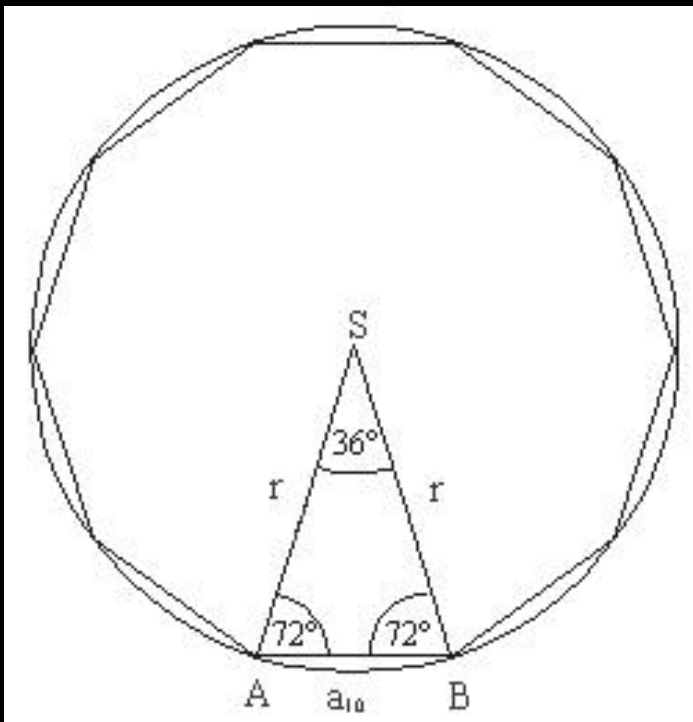


Zlatý trojúhelník a pentagram

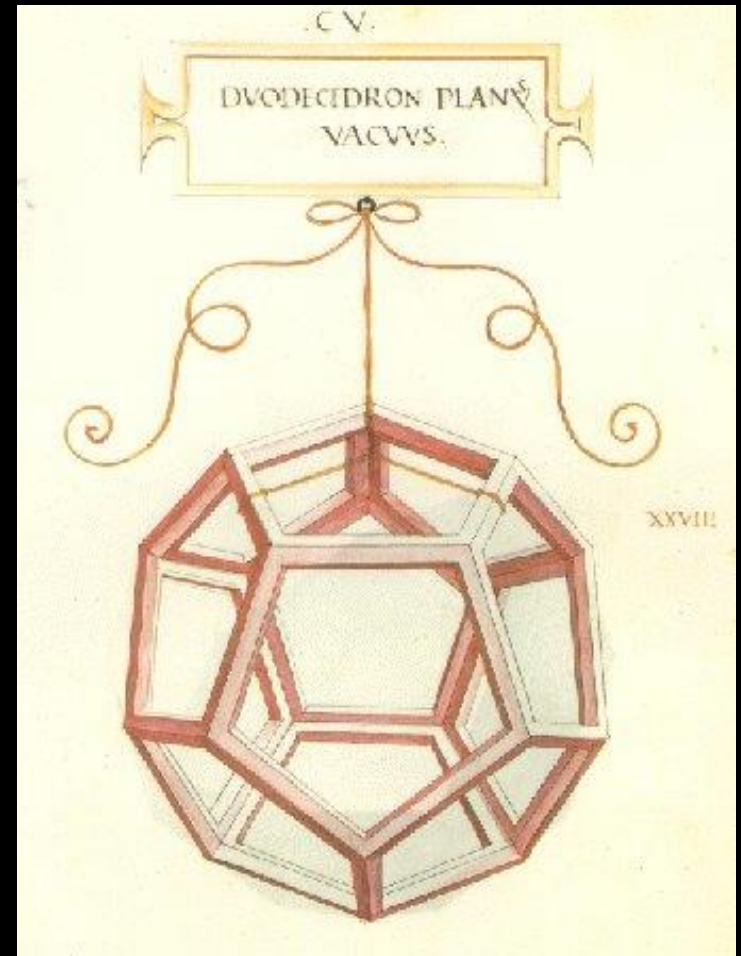
ZLATÝ ŘEZ – zlatý trojúhelník

Konstrukce

Pravidelný desetiúhelník



ZLATÝ ŘEZ – Platónská tělesa – Luca Pacioli

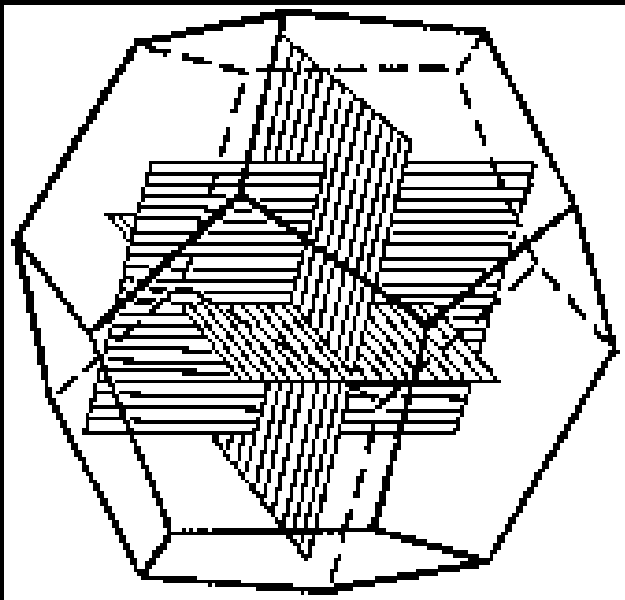


Luca Pacioli (1447-1517)

Byl vzdělán v malířské dílně U Piera della Francesca.

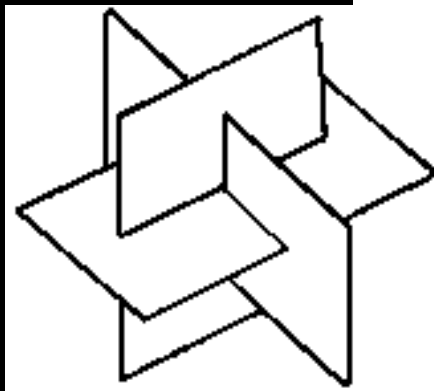
Napsal pojednání **De Divina Proportione** s vyobrazeními mnohostěnů od Leonarda da Vinci.

ZLATÝ ŘEZ – Platónská tělesa

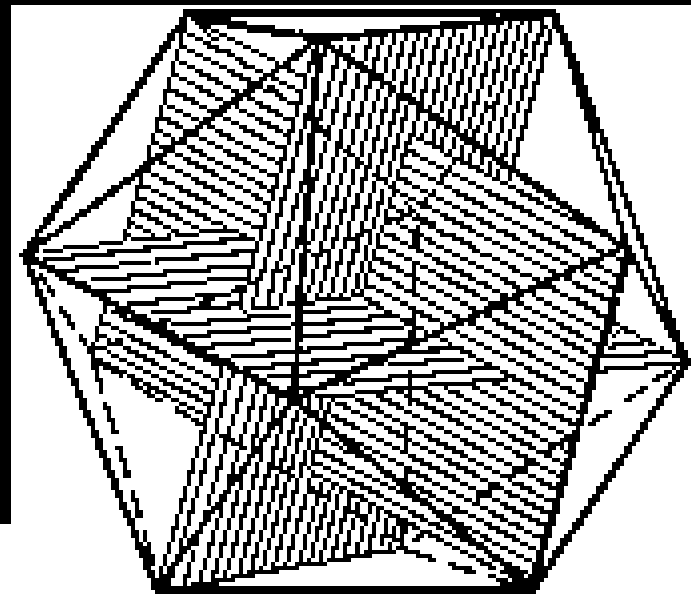


Dvanáctistěn

Do vrcholů umístím
středů pětiúhelníků



Tři zlaté obdélníky propojím kolmo

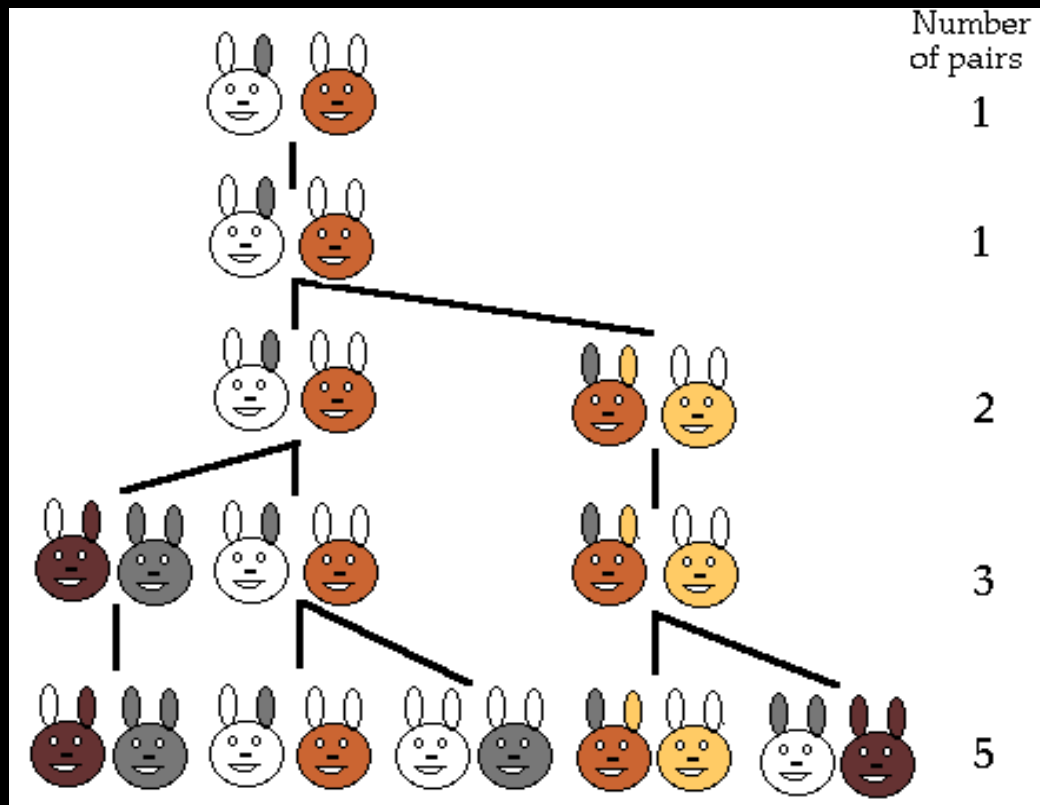


Dvacetistěn

Spojím vrcholy

ZLATÝ ŘEZ – Fibonacciho posloupnost

Leonardo Pisánský – Fibonacci (1170 - 1240)
desítková soustava, arabské číslice



ZLATÝ ŘEZ – Fibonacciho posloupnost

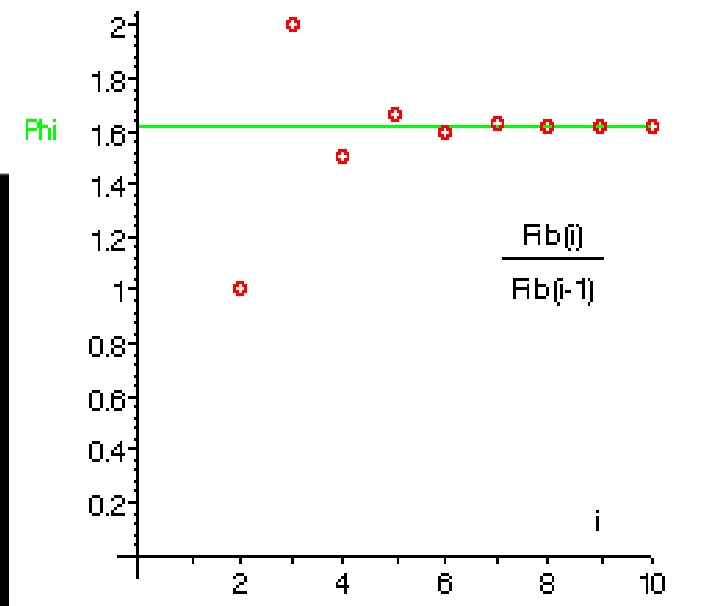
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots, \frac{144}{89}, \frac{233}{144}, \frac{377}{233}, \dots$

1 2 1,5 1,66 1,6 1,625 ... 1,6179 1,61805 1,618025 ...

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1,61803 = \Phi \quad (\text{Binetova formule})$$



ZLATÝ ŘEZ – Fibonacciho posloupnost

Benfordův zákon – pravděpodobnost výskytu číslice na začátku náhodného čísla (státní nákupy zemědělských produktů USA, počet úmrtí při velkých zemětřeseních, logaritmické tabulky, soubory dat říčního povodí, baseballové statistiky, čísla vyskytující se v textech časopisu Reader's Digest...)

1 – 30%, 2 – 17,6%, 3 – 12,5%, 4 – 9,7%, 5 – 8%, 6 – 6,7%, 7 – 5,8%, 8 – 5%, 9 – 4,6%

Platí i pro členy Fibonacciho posloupnosti

Pomocí tohoto zákona lze odhalit např. účetní podvody.

ZLATÝ ŘEZ – fylofaxe

Fylofaxe = uspořádání listů rostliny

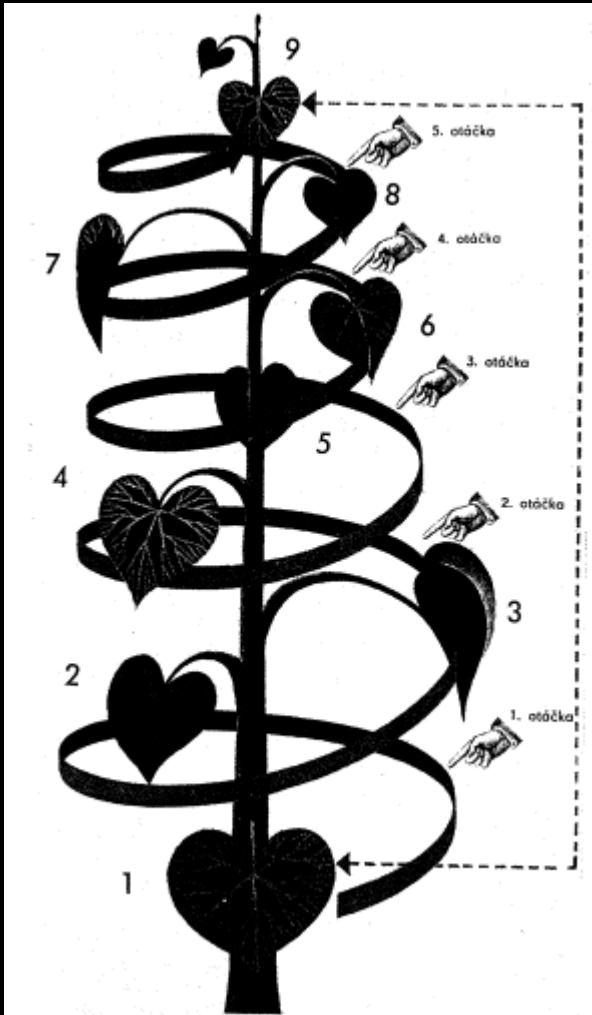
1/2 - lípa, 1/3 – líska, 2/5 – meruňka, 3/8 – hrušeň ...

Fibonacciho čísla ob jedno

Úhel mezi stonky dvou sousedních listů

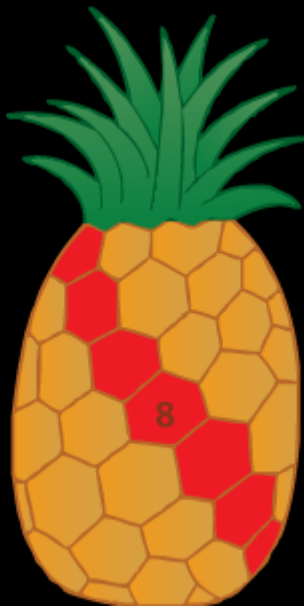
$$360^\circ / \Phi = 222,5^\circ$$

$$137,5^\circ = 360^\circ - 222,5^\circ$$

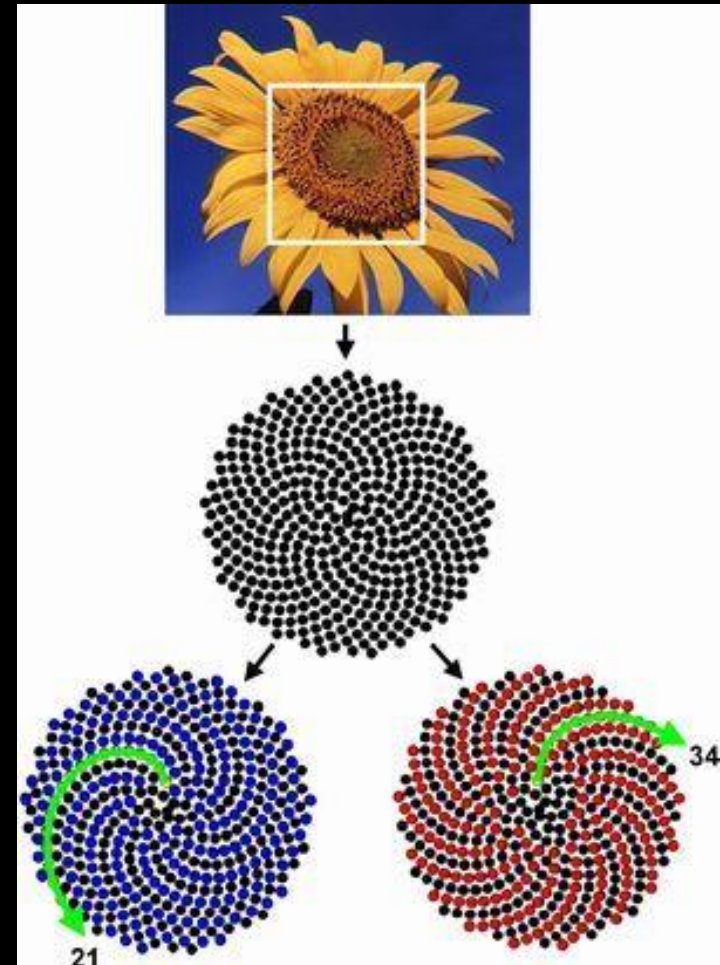
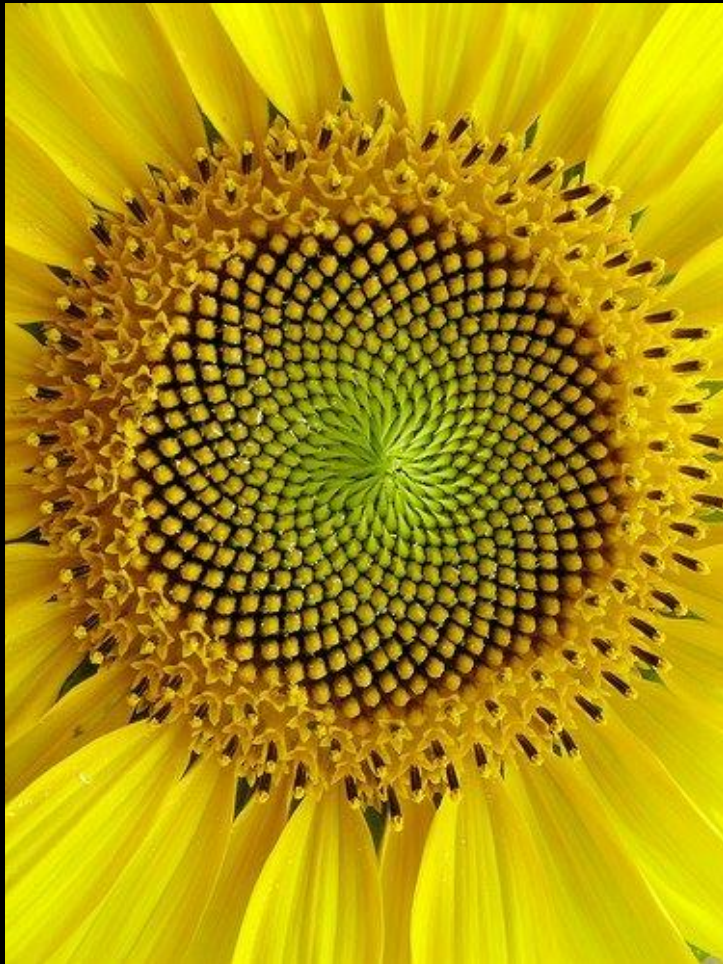


ZLATÝ ŘEZ

Ananas – tři skupiny spirál
Počet spirál je většinou
5, 8, 13 nebo 8, 13, 21
(trojice sousedních členů
Fibonacciho posloupnosti).

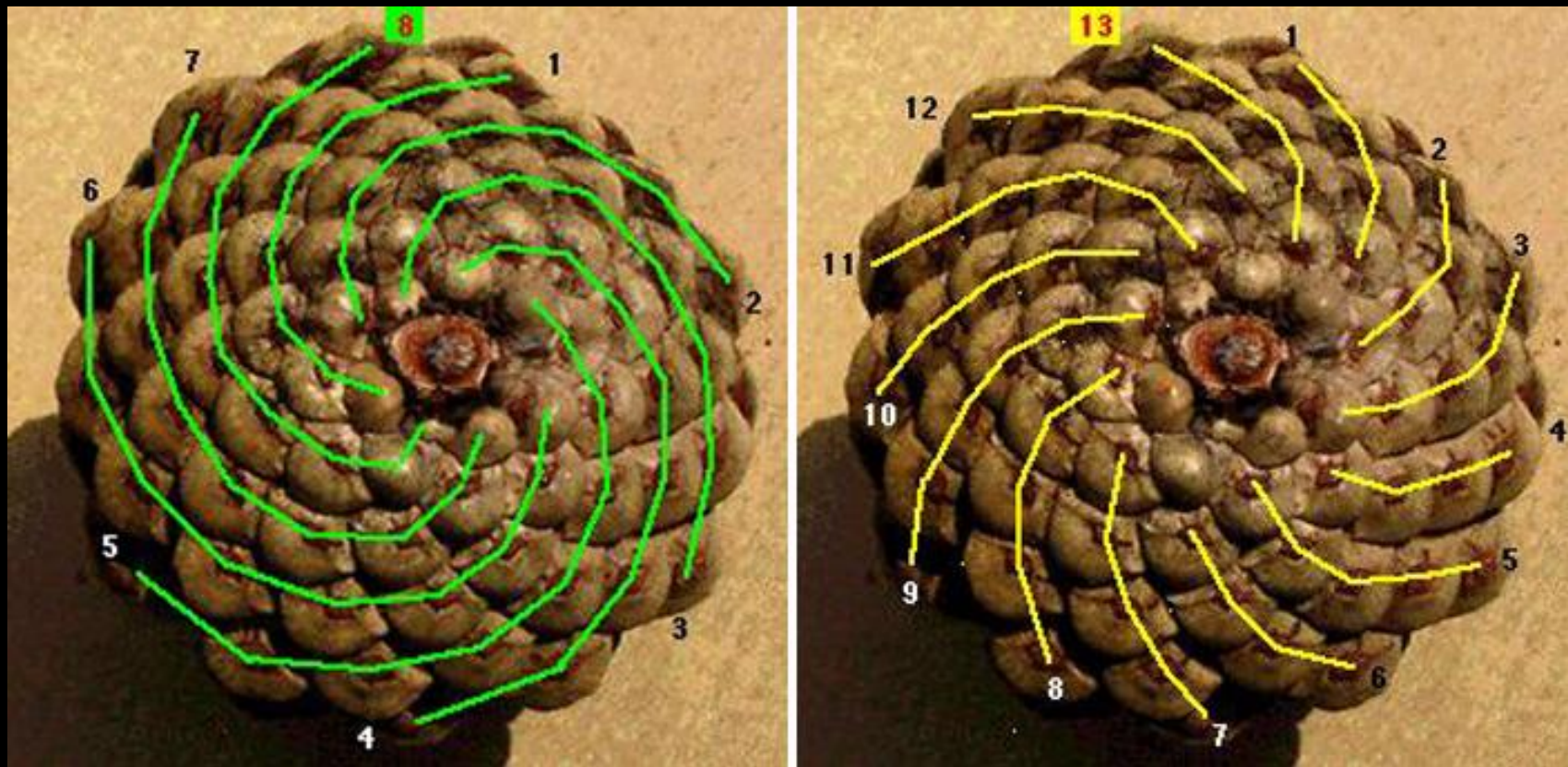


ZLATÝ ŘEZ - slunečnice



Počty logaritmických spirál v opačných směrech jsou sousední členy Fibonacciho posloupnosti: 21-34, většinou 34-55, ale i 89-55, 144-89...

ZLATÝ ŘEZ

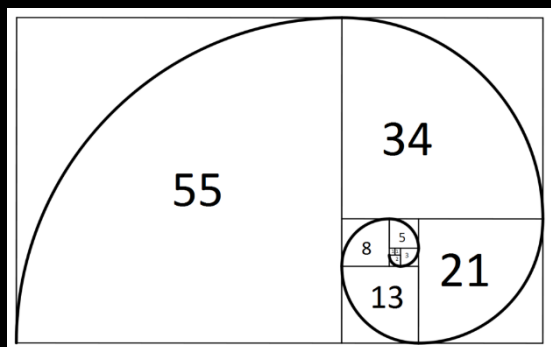
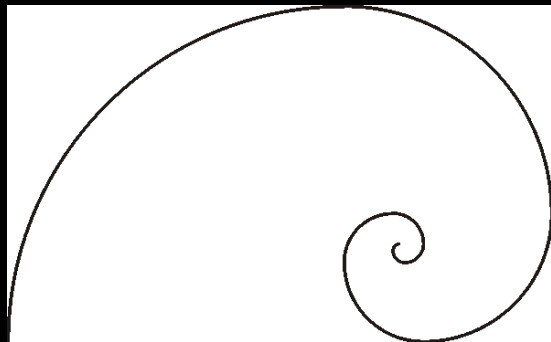


Počty spirál tvořených šupinami šišky jsou sousední členy Fibonacciho posloupnosti, zde 8 a 13.

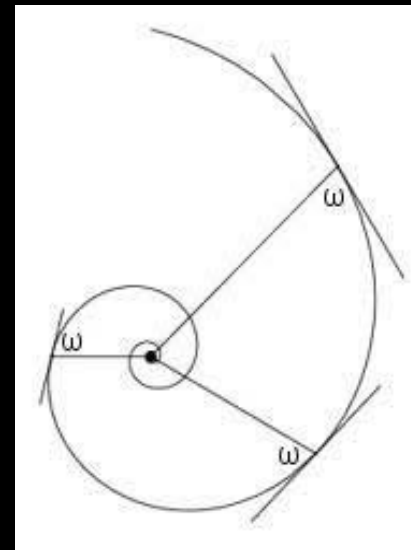
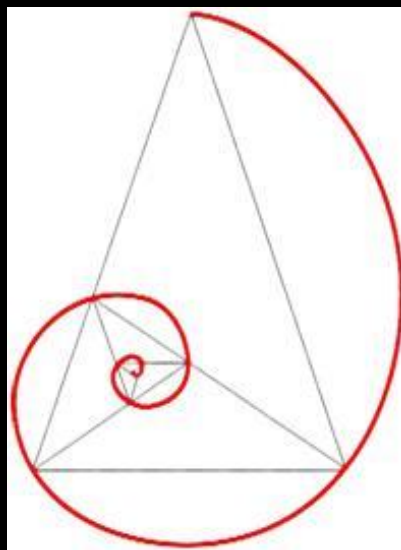
ZLATÝ ŘEZ – logaritmická spirála

Logaritmická spirála = ekviangulární (rovnoúhlá) spirála
Nemění tvar se vzrůstající velikostí (soběpodobnost).

rovnice: $r = a^\varphi$, $a > 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$



Přibližné konstrukce spirály pomocí
zlatého obdélníka a zlatého trojúhelníka



Průvodič svírá s tečnou
konstantní úhel.

ZLATÝ ŘEZ – logaritmická spirála

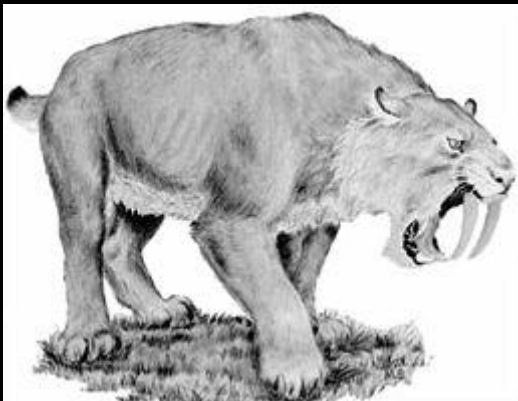


Pásky oblačnosti tvořící se ve středu tropických cyklón

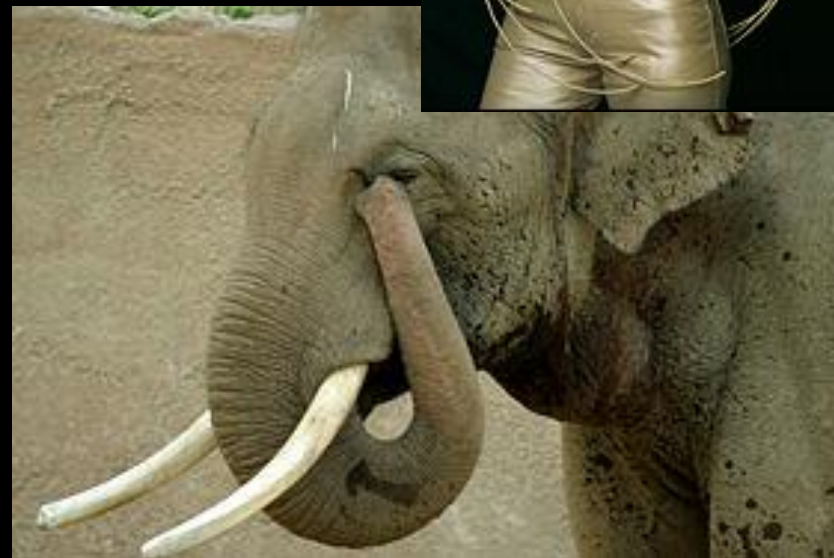
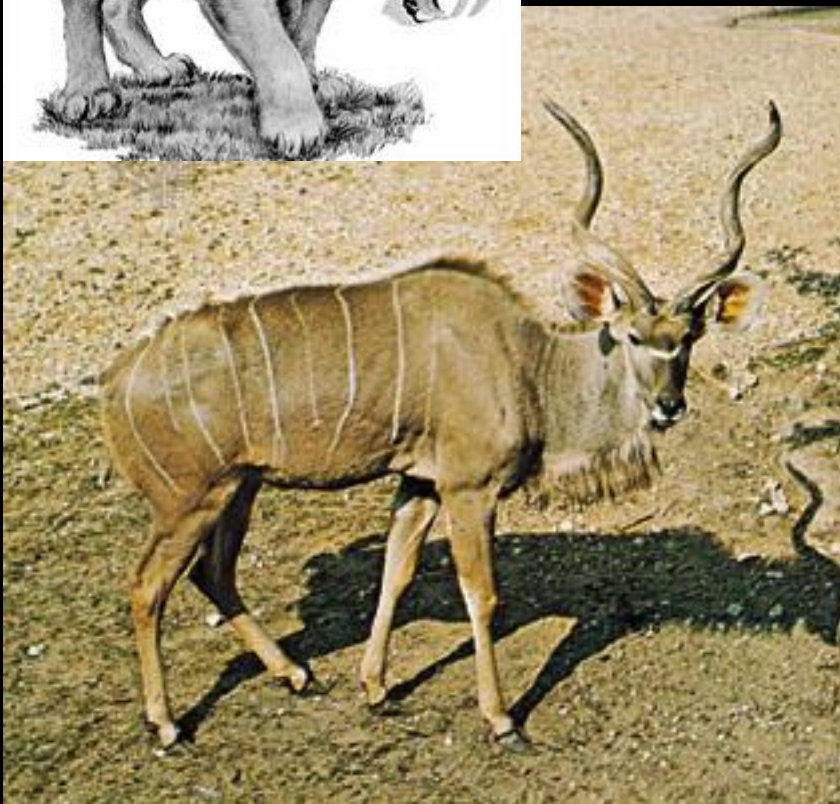


Ramena spirálních galaxií

ZLATÝ ŘEZ — logaritmická spirála



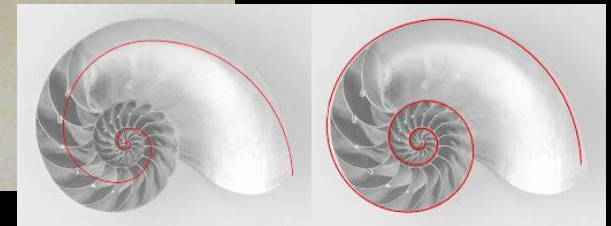
Logaritmická spirála - neživé části živých organismů:
zobáky, zuby, kly, rohy, nehty, ulity



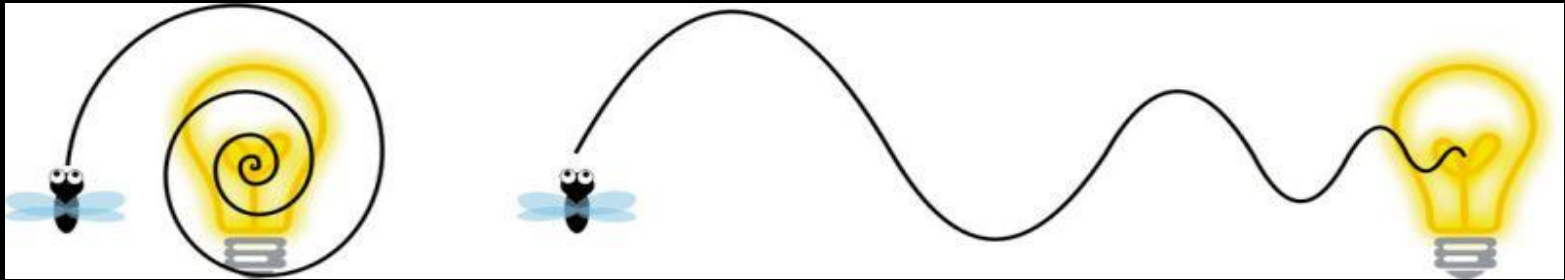
ZLATÝ ŘEZ – logaritmická spirála

Loděnka hlubinná (Nautilus Pompilius)

– hlavonožec s pevnou schránkou, konec prvohor (200 mil. let)

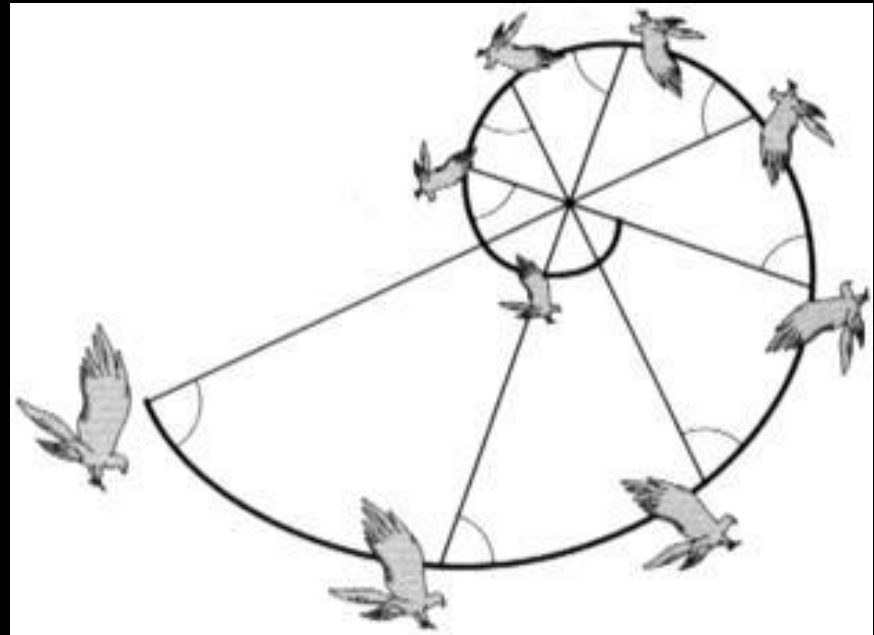


ZLATÝ ŘEZ – logaritmická spirála

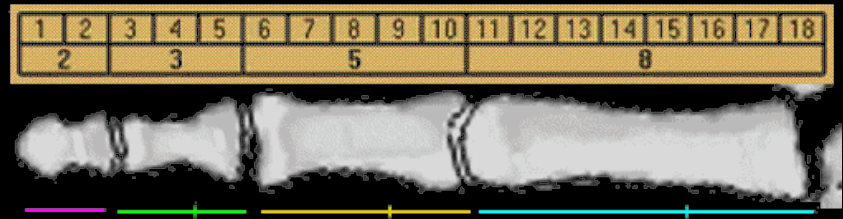
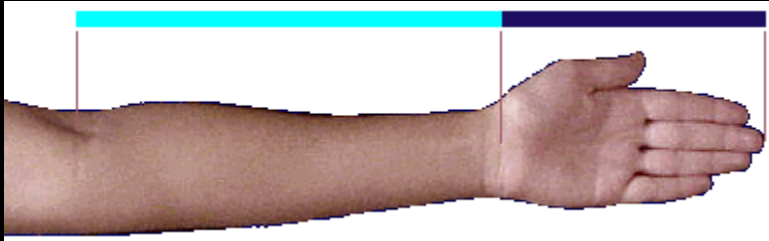


Dráha, po níž se hmyz přibližuje ke zdroji světla.

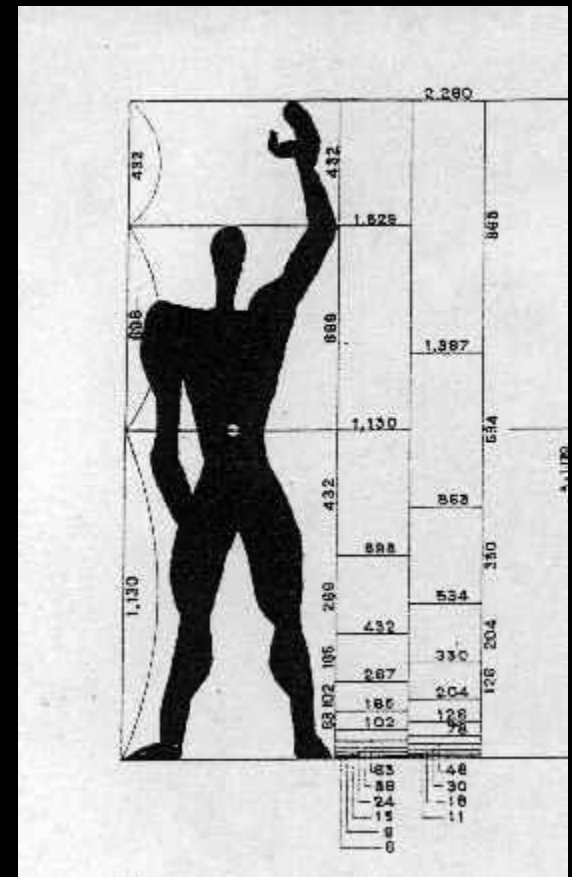
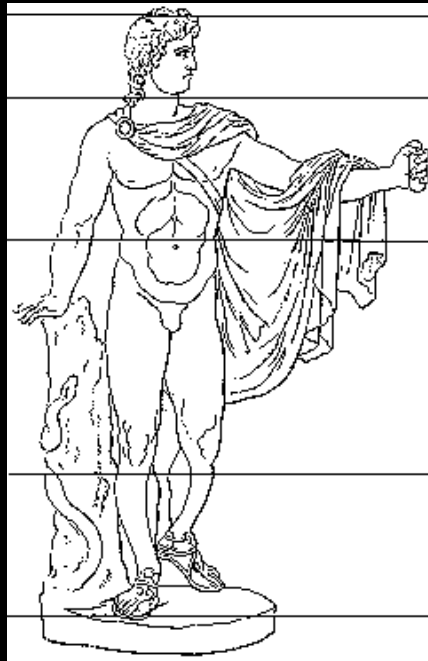
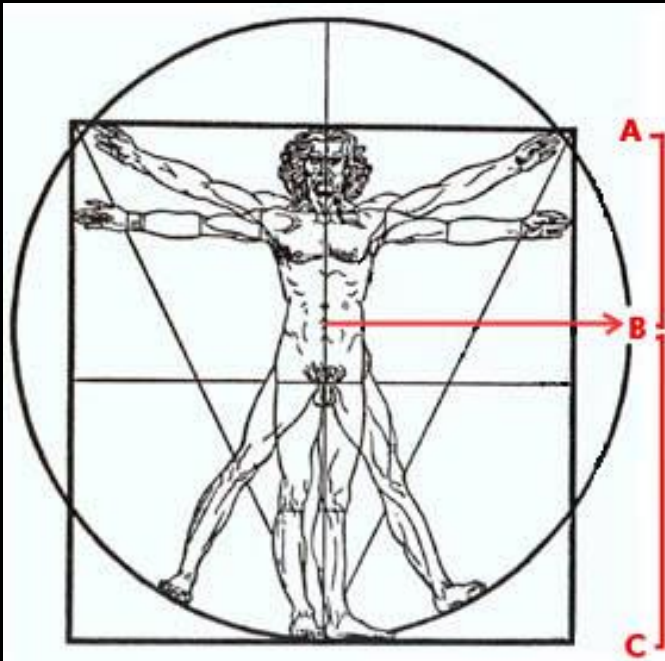
Dráha, po níž se draví ptáci (sokoli) přibližují ke své kořisti.
Rovnoúhlost spirály jim umožňuje pozorovat kořist pod stálým úhlem.



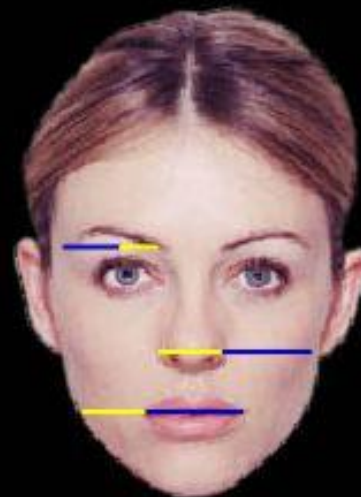
ZLATÝ ŘEZ – člověk



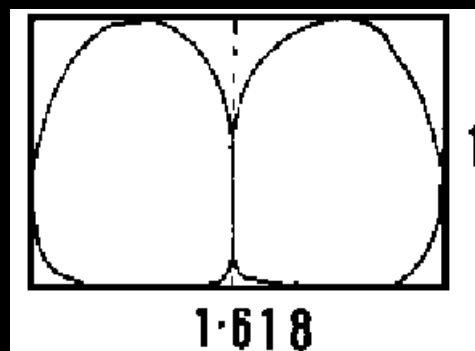
Poměr částí lidského těla



ZLATÝ ŘEZ – lidský obličej



The Golden Elements In
The Face

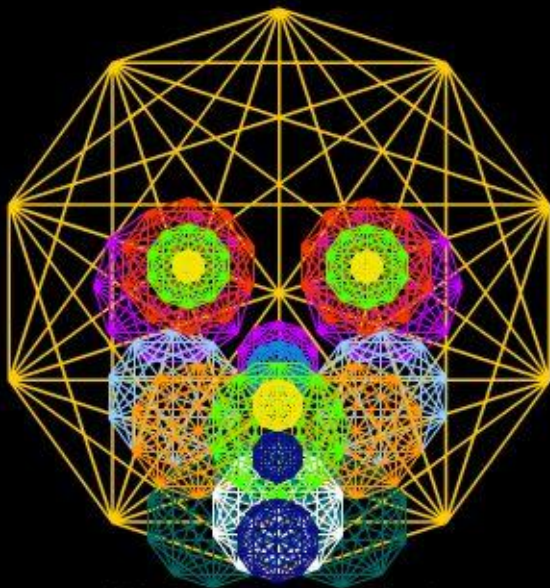


ZLATÝ ŘEZ – lidský obličej - MBA

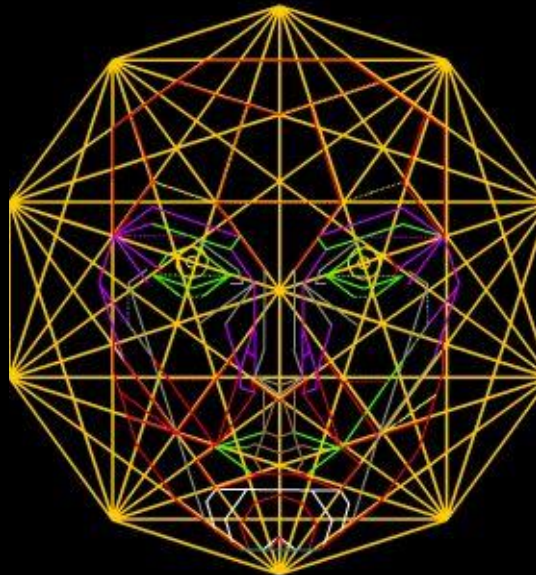
MBA (Marquardt Beauty Analysis) - www.beautyanalysis.com

Plastický chirurg **Dr. Stephen R. Marquardt** (Kalifornie, USA)

- s využitím matematiky (zlatého řezu), počítače a velmi hojné databáze atraktivních tváří (27 let praxe) - vytvořil vzorec, prototyp, masku krásy.



The Golden Decagon Matrix
With The Facial Component
Golden Decagon Matrices

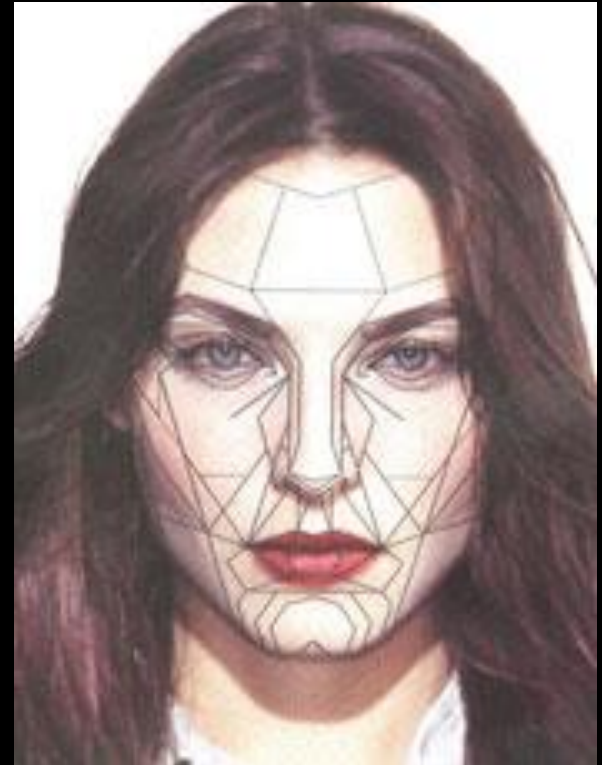
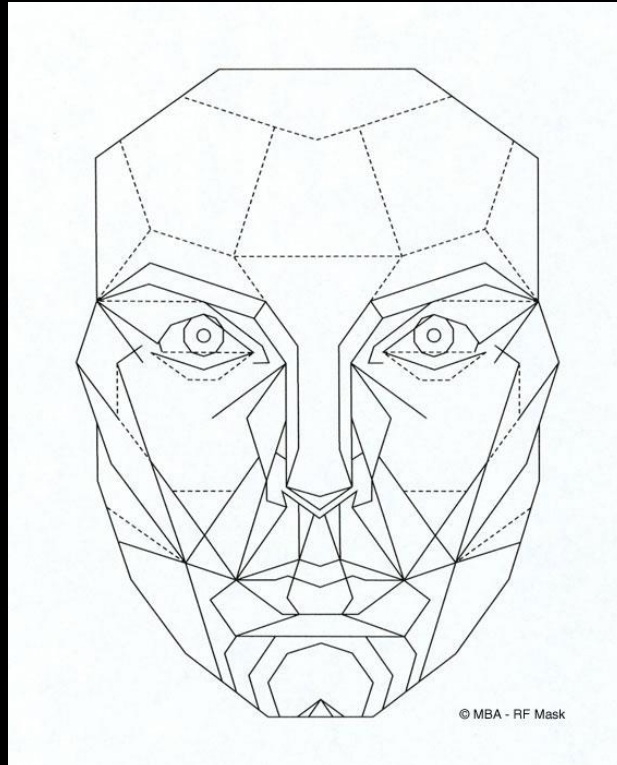


The Golden Decagon Matrix
With The Facial Component
Golden Decagon Matrices

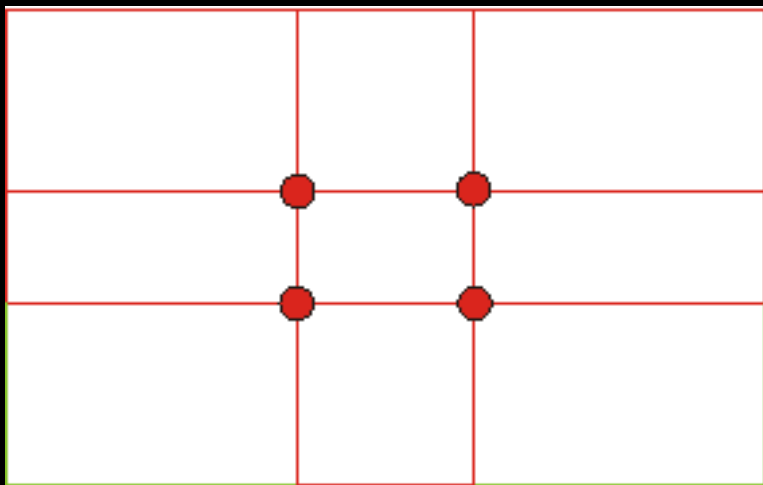


The Golden Facial Mask

ZLATÝ ŘEZ – lidský obličej - MBA

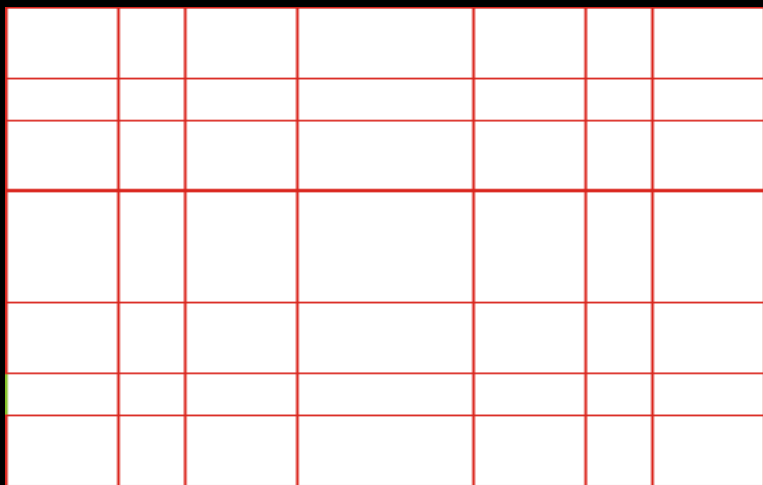


ZLATÝ ŘEZ – výtvarné umění

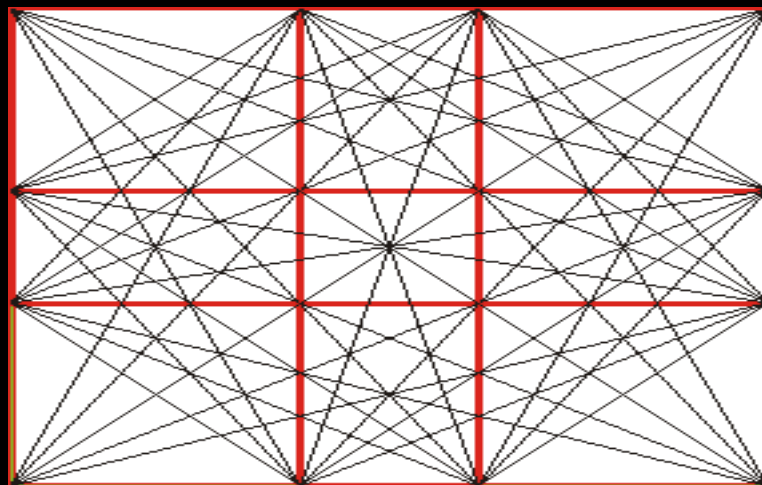


základní síť

- Kompozice obrazů, fotografií...
- Rozměry plátna, rámů, paspart
- ...
- Proporce soch



zjemnění síť



dynamická síť - úhlopříčky

ZLATÝ ŘEZ – kompozice fotografie



Symetrie



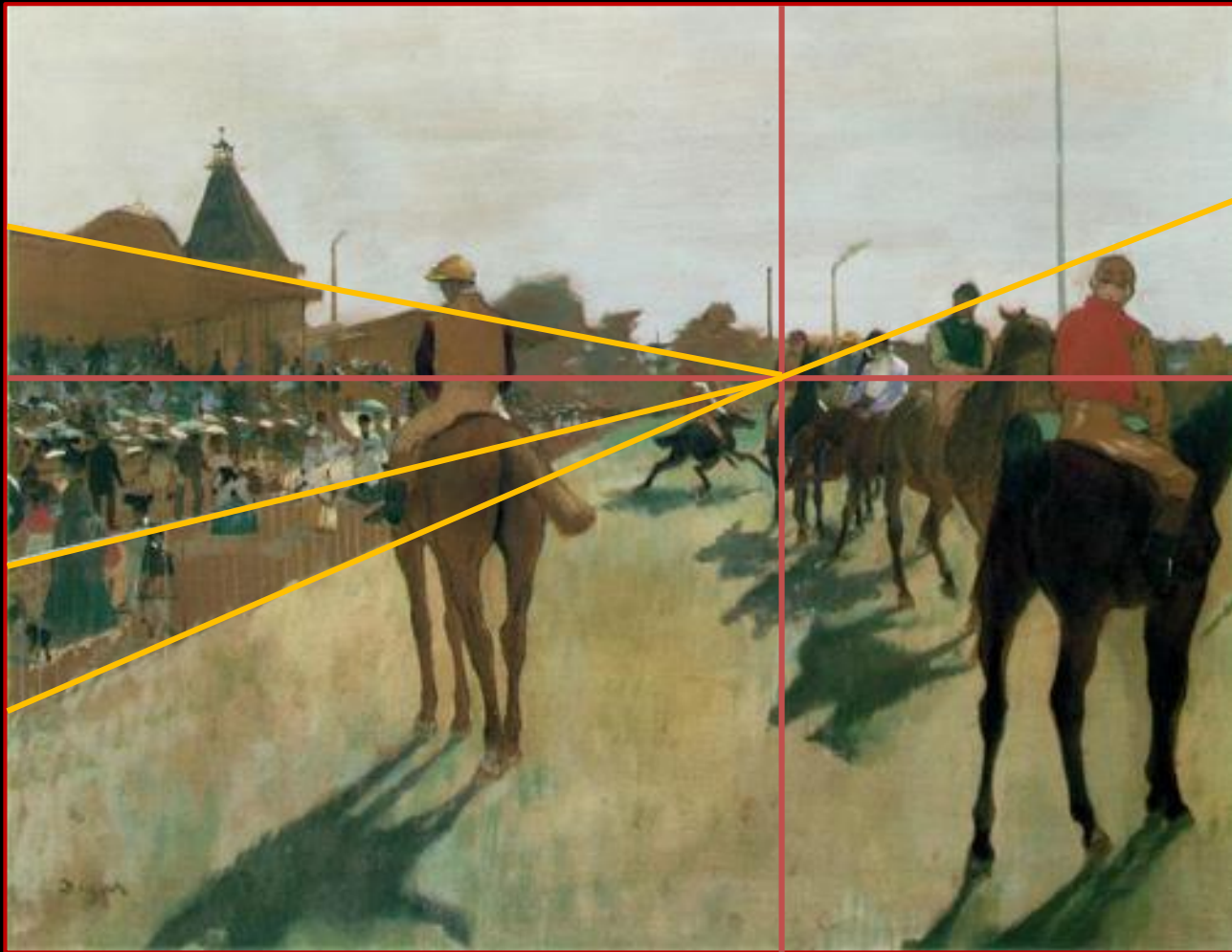
Zlatý řez

ZLATÝ ŘEZ – kompozice



Pohlednice – Neapolský záliv

ZLATÝ ŘEZ – malířství

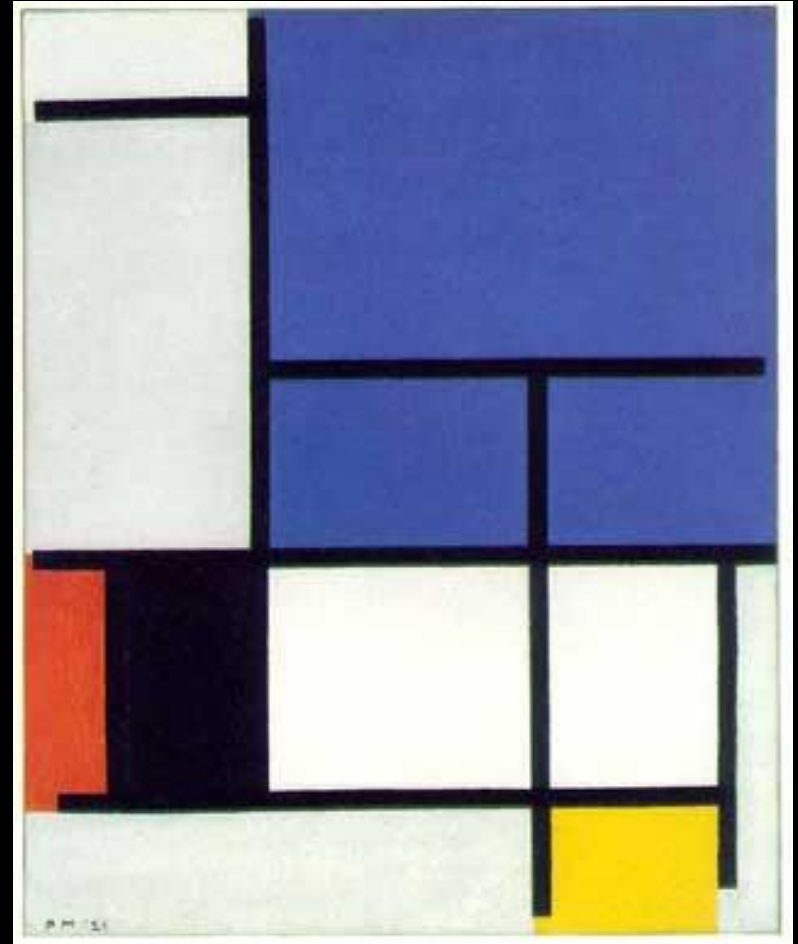


Edgar Degas - Defilé

ZLATÝ ŘEZ – malířství



Jan Vermeer



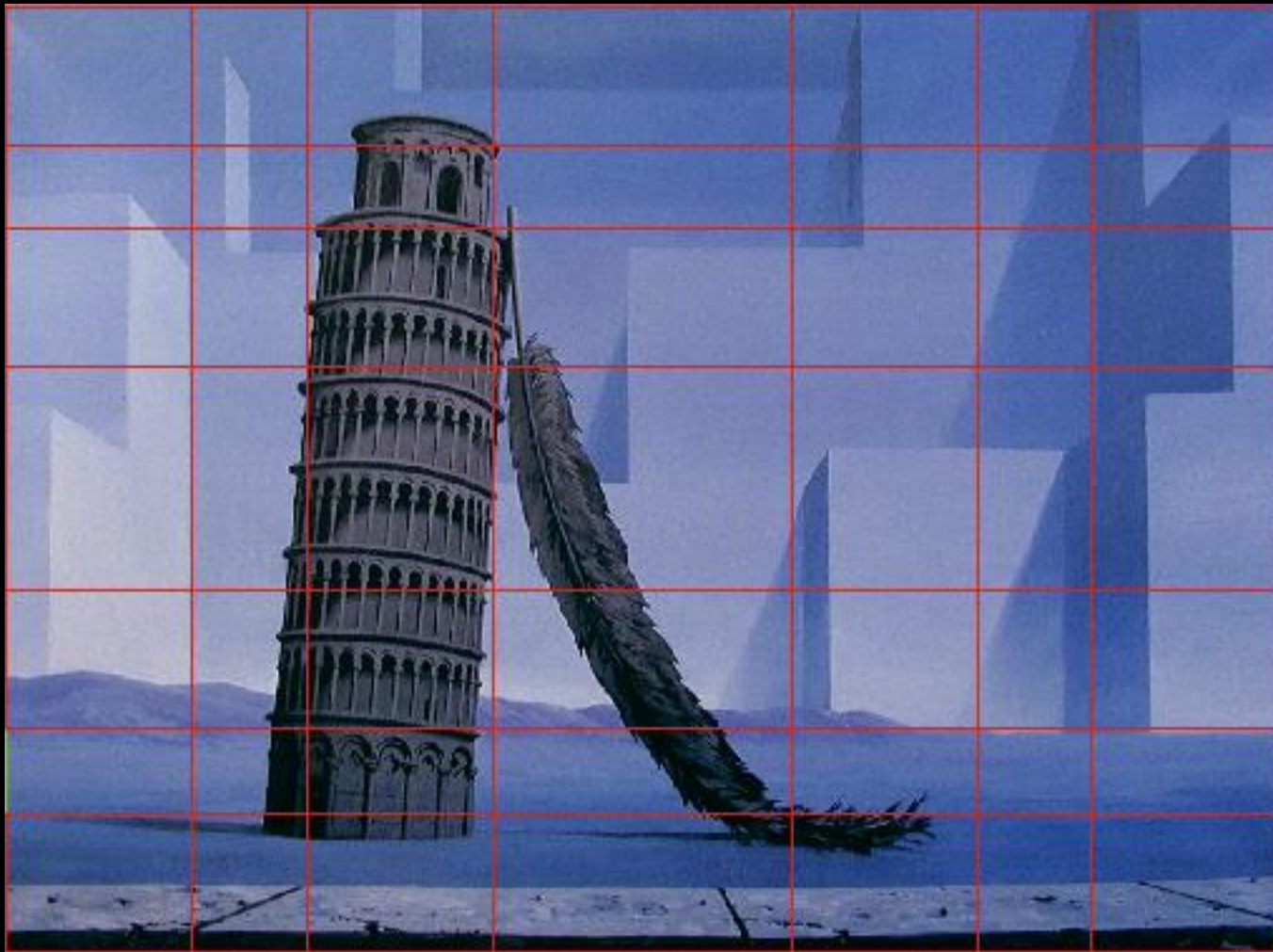
Piet Mondrian

ZLATÝ ŘEZ



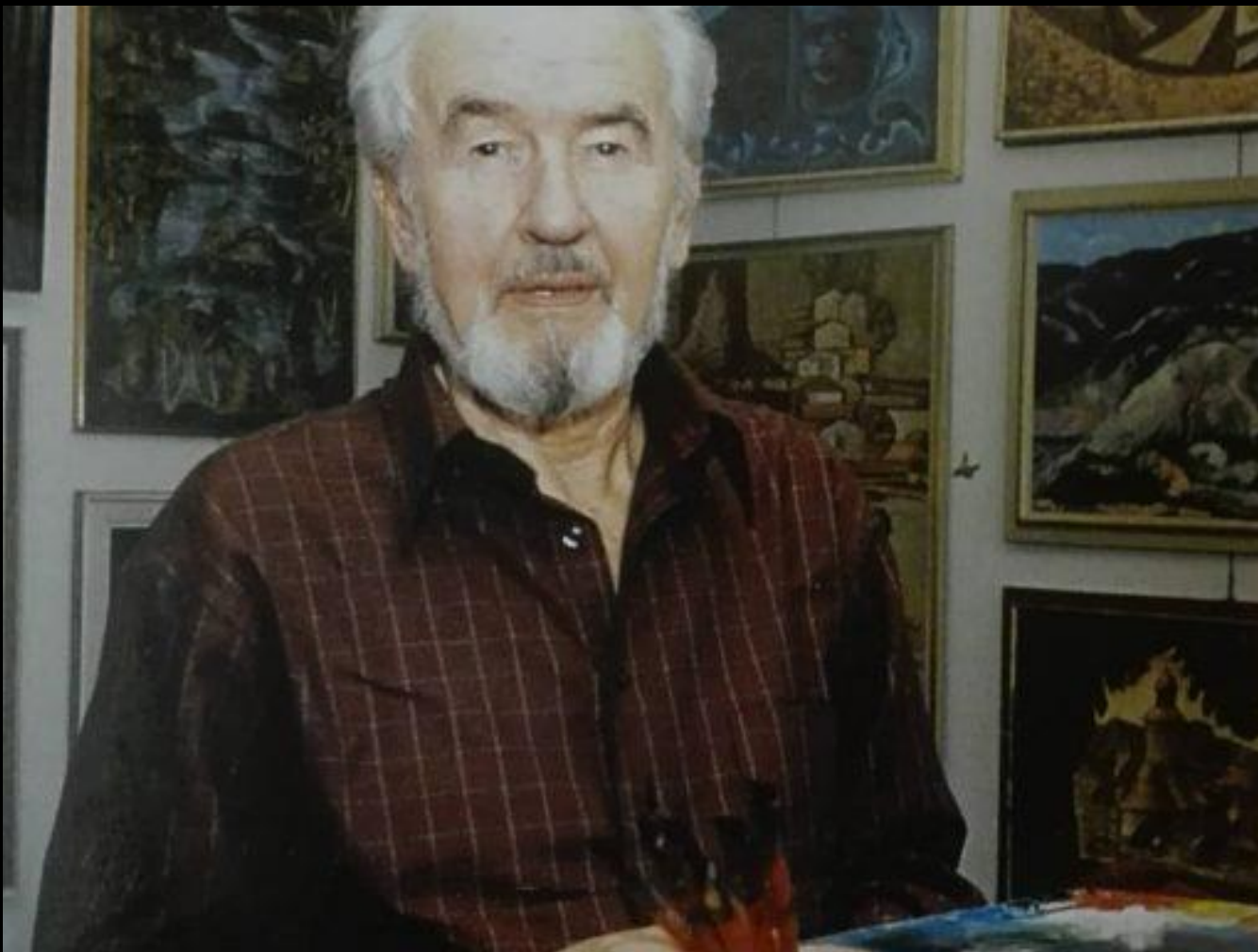
George Seurat

ZLATÝ ŘEZ — malířství



René Magritte

ZLATÝ ŘEZ – malířství



Karel Březina

ZLATÝ ŘEZ – malířství

Zlatý řez:

v geometrii značí určitý poměr, úměru, pravidlo,
podle kterého rozdělit se má daná úsečka.
Budíž na př. úsečka AB rozdělena podle z.ř.
v úsečky AC a CB , pak o těchto platí rovnice:

$$CB : AC = AC : AB \text{ čiž}$$

$$(a - x) : x = x : a, \text{ když } AB = a, AC = x$$

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$

$$x = \frac{a}{2} (-1 \pm \sqrt{5}).$$

Řešíme-li poslední výraz graficky, dostaneme
súto konstrukci řezu:

$$DB \perp AB; DE = DB = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2};$$

$$AD = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}} \quad AC = AE = AD - \frac{a}{2} =$$

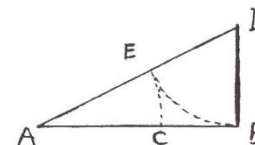
$$\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = x$$

Řez zlatý dá se též přibližně vyjádřit čísly:

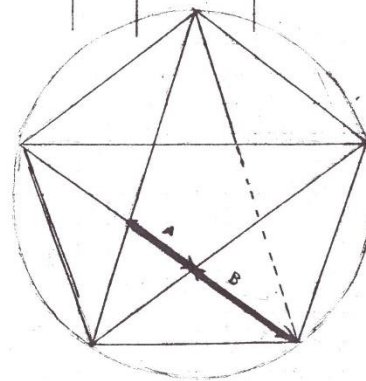
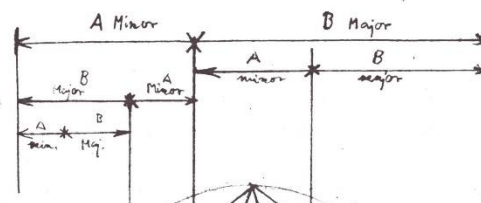
$$\frac{CB}{AC} = \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55} \dots$$

a jeť poměrem, který nejvíce ladí s
lidským, vylouvá pořádek estetický
proto užívá se ho v uměleckém i obyčejném
prostoru k určité vhodných rozměrů,
než př.: návrhové, dleka na vzhledu

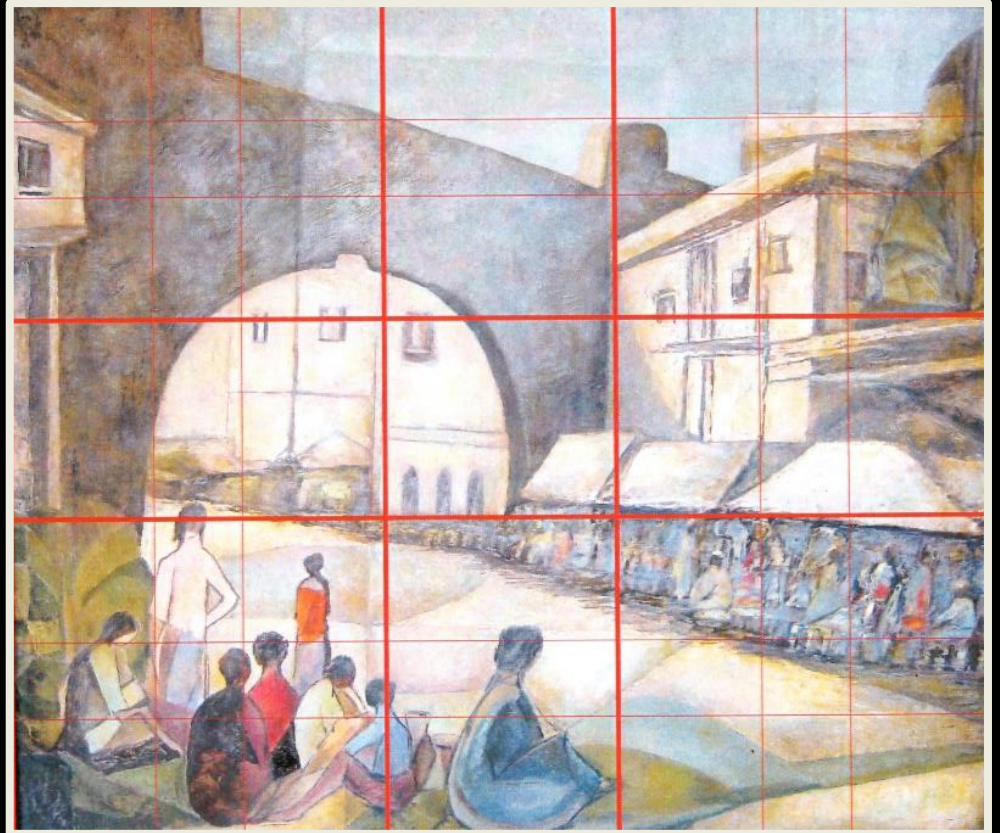
číslo, rámců, poměrů v obraze a post.



Řez zlatý.

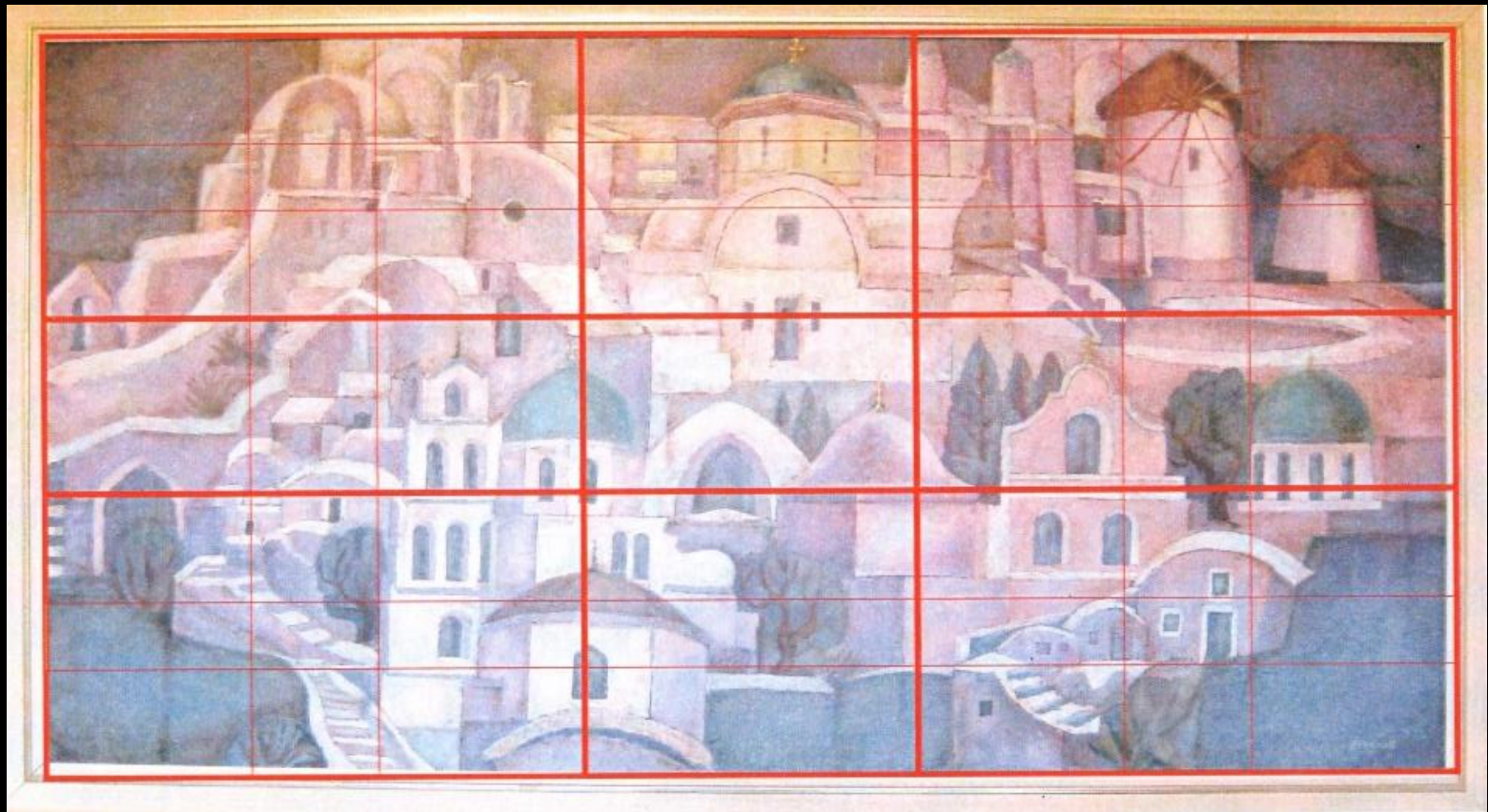


ZLATÝ ŘEZ – malířství



Karel Březina

ZLATÝ ŘEZ — malířství

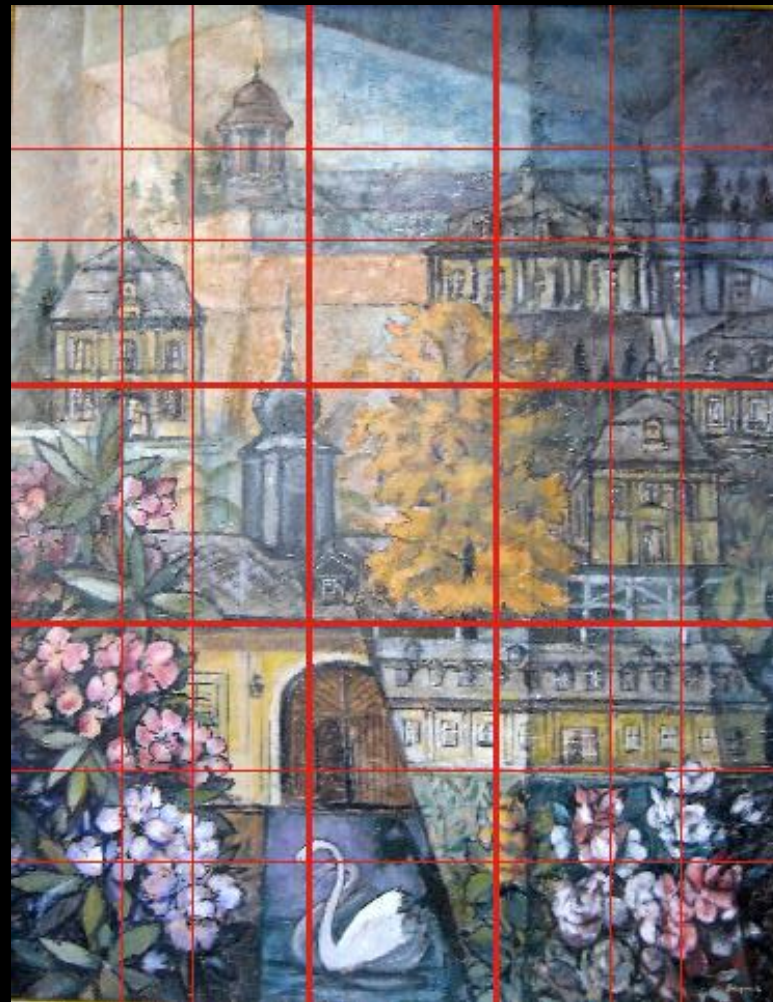


Karel Březina

ZLATÝ ŘEZ



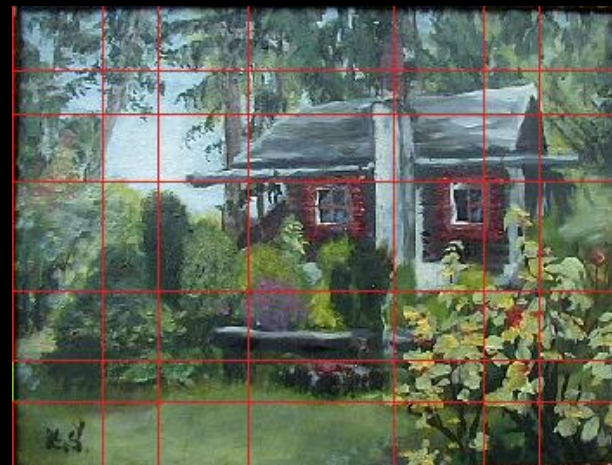
Březina – Boukal
Mozaika na vlakovém nádraží
V Českých Budějovicích



ZLATÝ ŘEZ – malířství

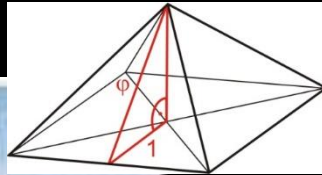


ZLATÝ ŘEZ – malířství

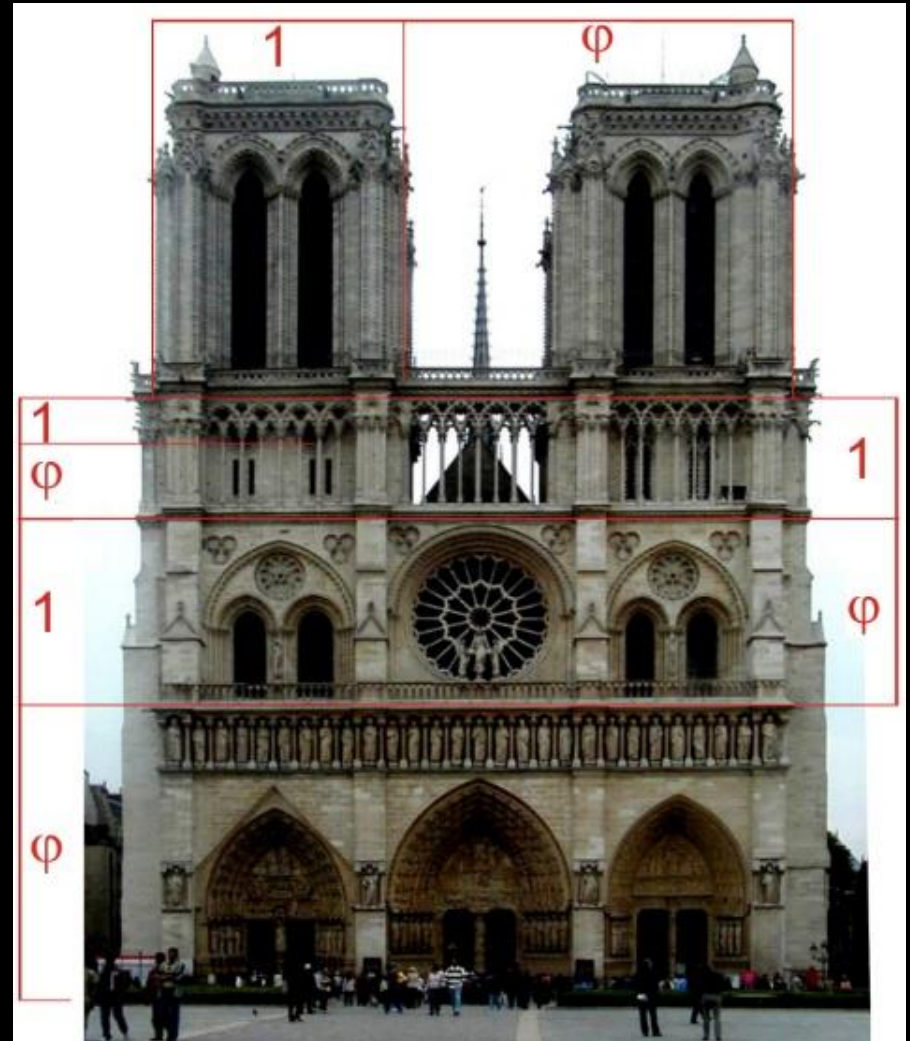


ZLATÝ ŘEZ - architektura

Starověk – Egypt

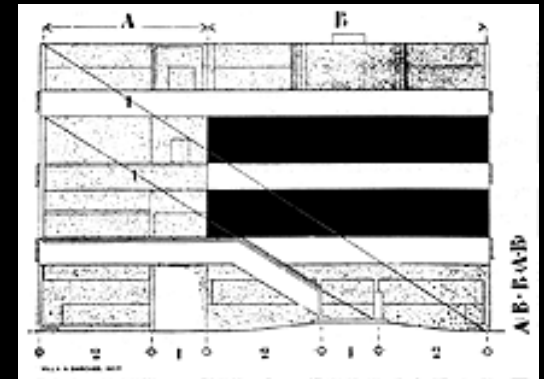


Antika – Parthenon



Notre-Dame – Paříž, Francie

ZLATÝ ŘEZ - architektura

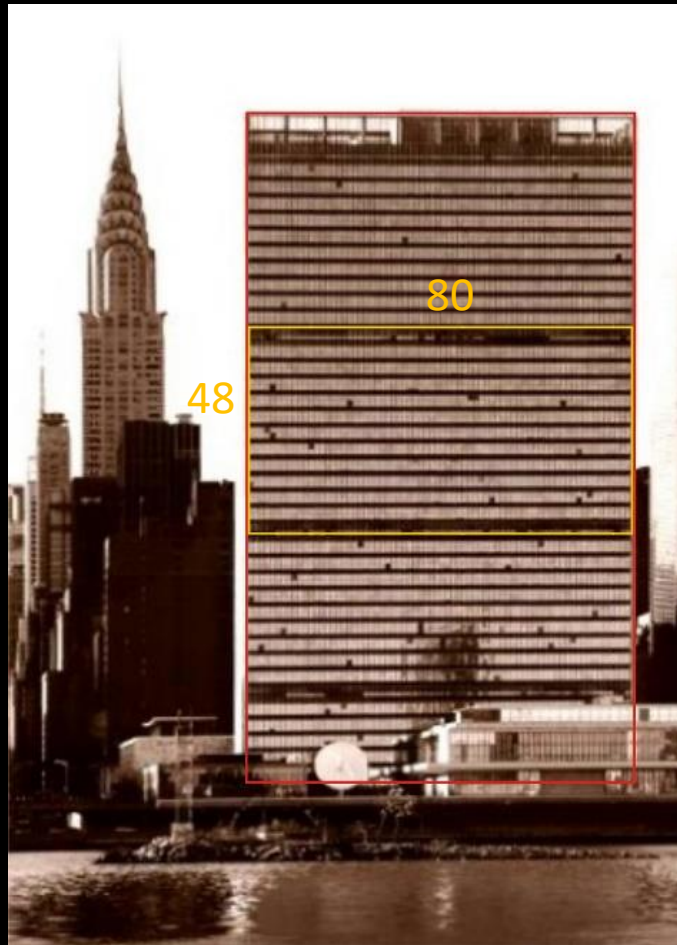


Le Corbusier - Villa Stein, Garchez,
Francie

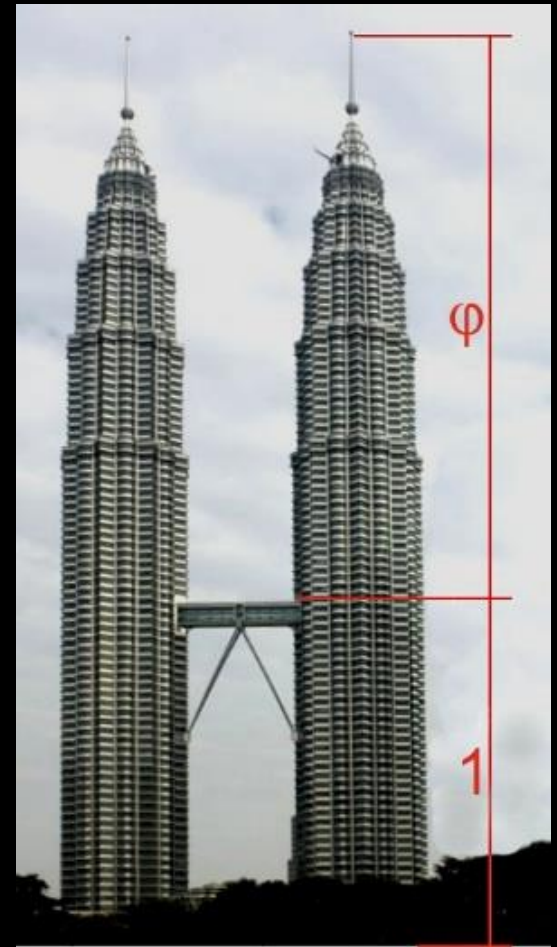
ZLATÝ ŘEZ - architektura



Televizní věž
Toronto, Kanada
 $553,34 / 351 = 1,576...$



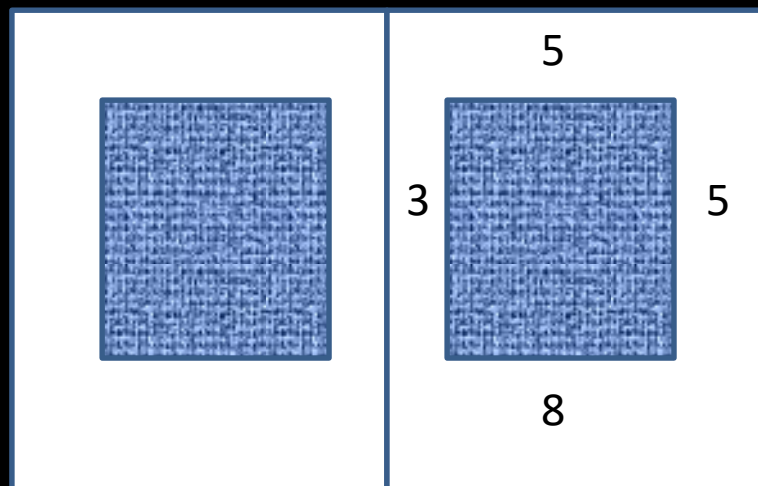
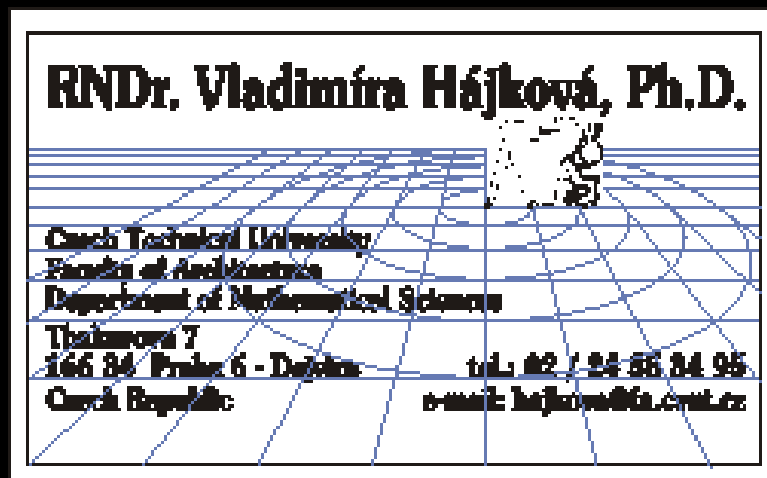
Budova OSN
New York, USA
 $80 / 48 = 1,666...$



Věže Petronas
Kuala Lumpur, Malajsie
 $(170 + 282) / 282 = 1,602...$

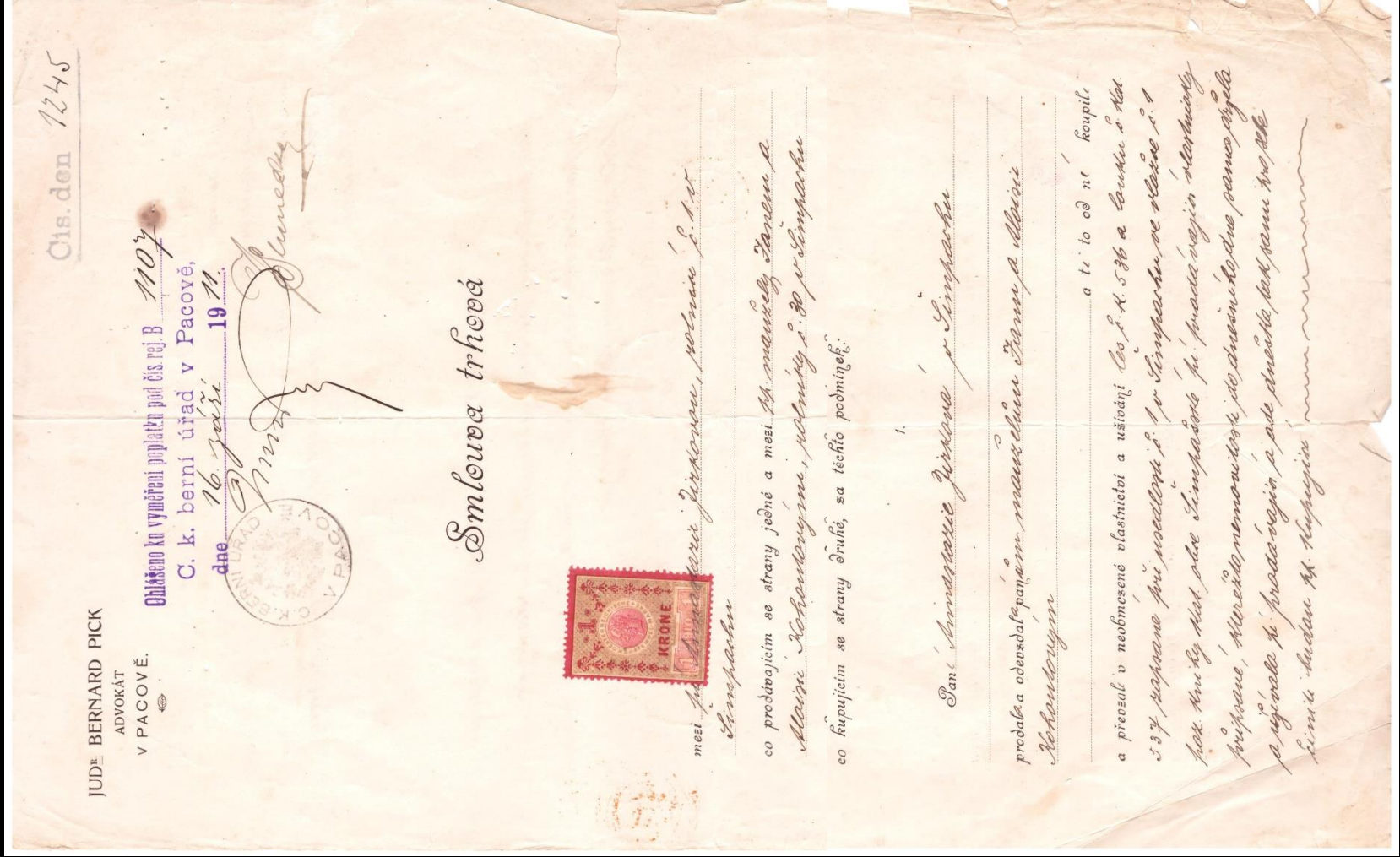
ZLATÝ ŘEZ

- Vizitky
- Platební a jiné karty
- Knihy, tiskové zrcadlo
- Typografie



ZLATÝ ŘEZ

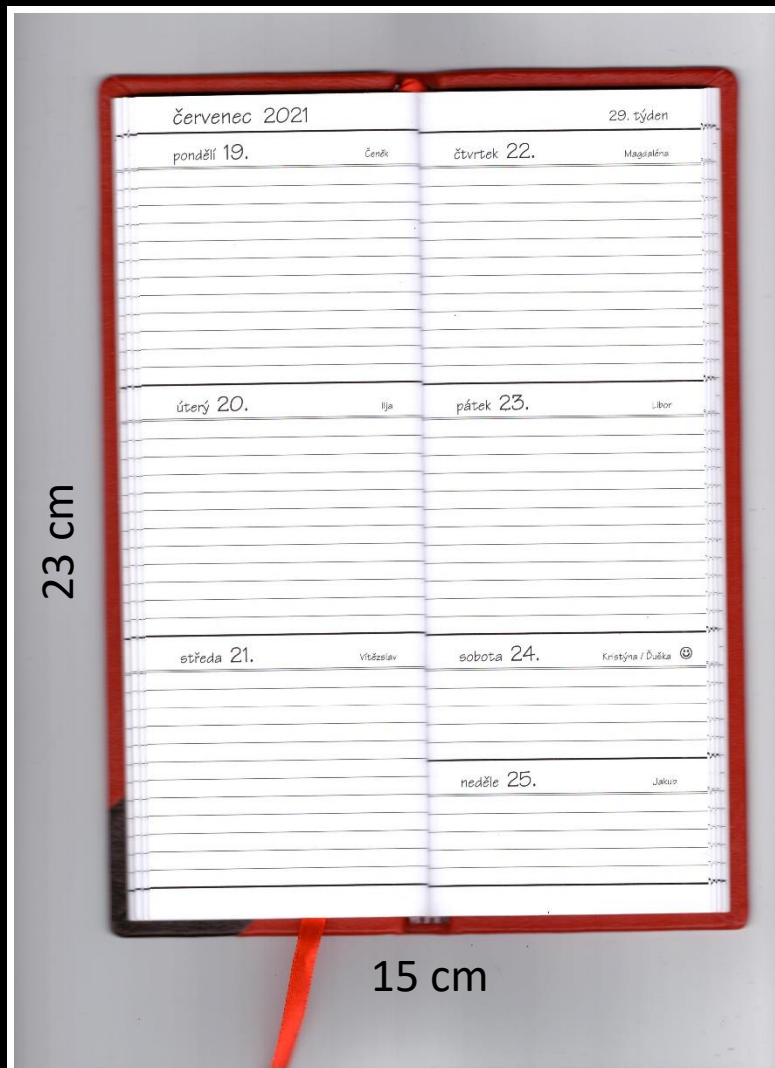
- Formáty papíru za Rakouska-Uherska

$$34/21 = 1,619$$


21 cm

34 cm

ZLATÝ ŘEZ



$$23/15 = 1,53$$

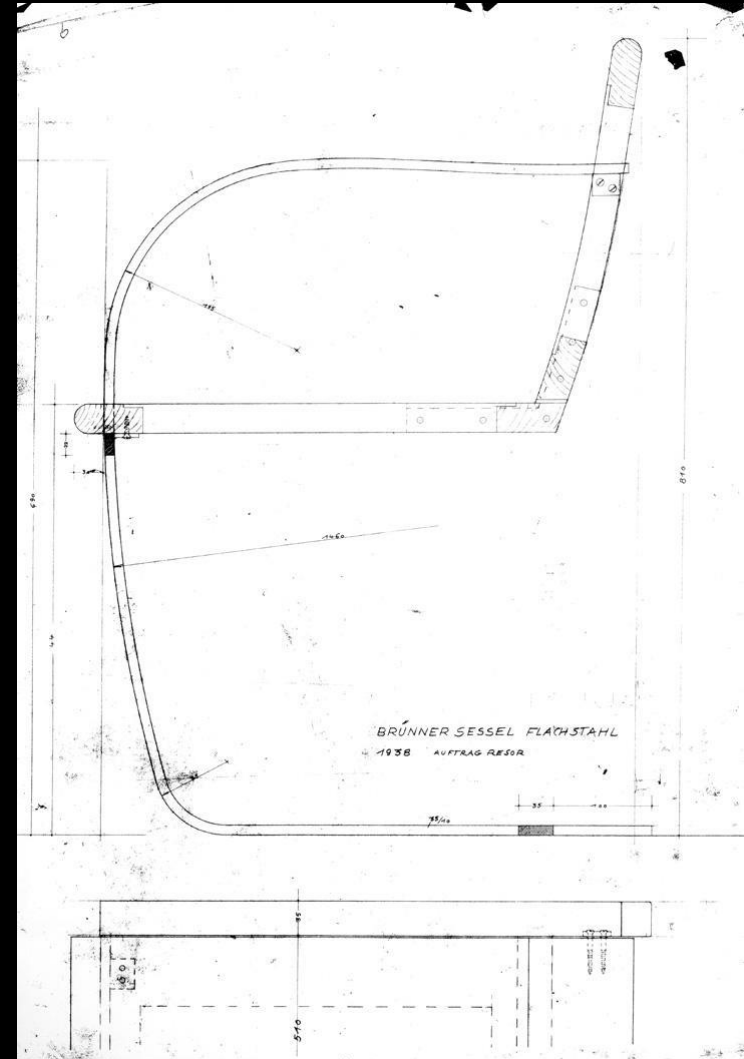
ZLATÝ ŘEZ

- Nábytek

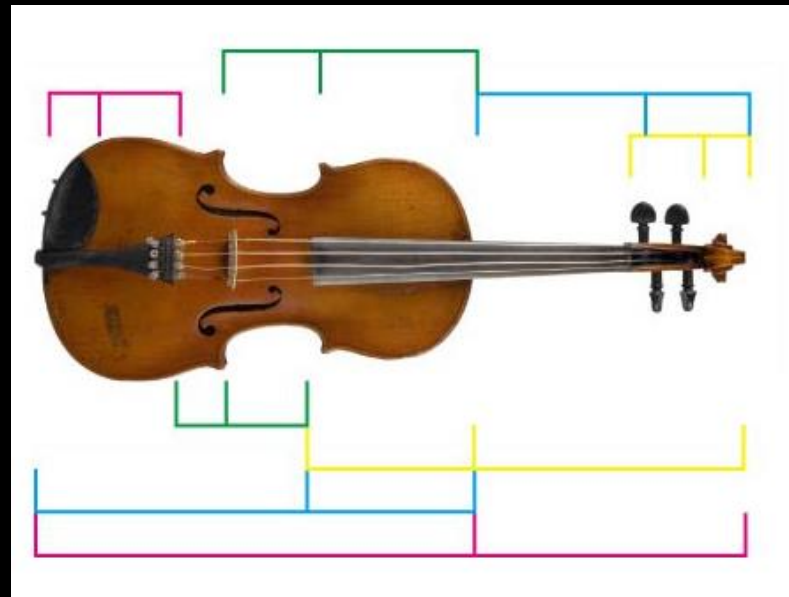
$$810/480 = 1,6875$$



Židle Brno, vila Tugendhat,
Ludwig Mies van der Rohe



ZLATÝ ŘEZ



- Obchodování na burze
- Hudební nástroje
- Numerické metody v matematice – metoda zlatého řezu
- Ruleta, kurzové sázky při sportovních utkáních
- etc.

Zlatý řez je poměr vyvážený,
harmonický, oku lahodící.

Φ je bezpochyby číslo magické,
podivuhodné, zajímavé a překvapující,
které je nerozlučně spjata
s pozitivními estetickými pocity.

Zlatý řez není žádný univerzální zákon
krásky ani nedává záruku kvality
uměleckého díla, přesto má svoji
objektivní platnost.

Spojuje zejména matematiku a umění,
ale i matematiku s biologií
a dalšími vědami.

Je zakódován v přírodě i v nás samých,
proto nám nepřekáží a dobře se nám
v něm žije.



ZLATÝ ŘEZ - literatura

