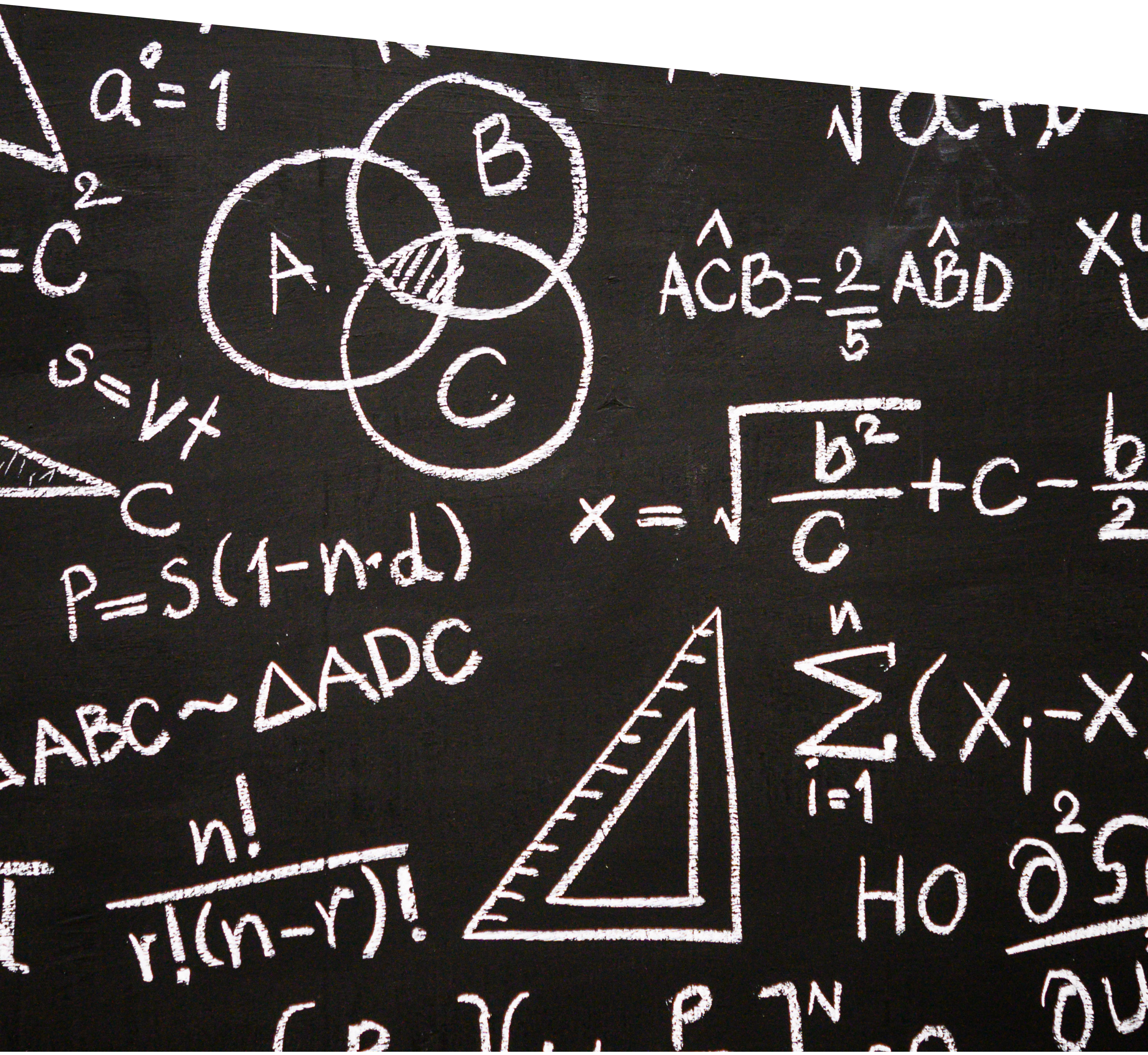
Modernizace studia a studijních programů, kvalita a poradenství na ČZU v Praze

Fakulta lesnická a dřevařská

Studijní materiály k přijímacím zkouškám

MATEMATIKA



Tento projekt je spolufinancován EU

Fakulta lesnická
a dřevařská

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Příprava pro stadium magisterského studijního programu Dřevěných konstrukcí a Staveb na bázi dřeva (NDKSBD)

Obsah

Lineární algebra

Matice a hodnost matice

Ukázkový příklad 1 – Určeme hodnost matice

```
A = 4×4
     1    -1     2     4
     3     1     0     2
     2     1     1     2
    -1     1    -1    -3
```

*Řešení: K určení hodnosti matice **A** použijeme Gaussův algoritmus, tj. algoritmus, při kterém pomocí ekvivalentních úprav provedeme matici **A** na horní lichoběžníkovou matici, která je s ní ekvivalentní:*

```
A = 4×4
     1    -1     2     4
     3     1     0     2
     2     1     1     2
    -1     1    -1    -3
```

1 – prohodíme první a druhý sloupec a potom jsme první řádek postupně přičetli ke všem ostatním řádkům

```
A1 = 4×4
     1    -1     2     4
     0     4     2     6
     0     3     3     6
     0     0     1     1
```

2 – Třetí řádek jsme vynásobili číslem 1/3 a prohodili jsme ho s druhým řádkem

```
A2 = 4×4
    -1     1     2     4
     0     1     1     2
     0     4     2     6
     0     0     1     1
```

3 – Ke třetímu řádku jsme přičetli (-4) násobek druhého řádku

```
A3 = 4×4
    -1     1     2     4
     0     1     1     2
     0     0    -2    -2
     0     0     1     1
```

4 – Vynechali jsme třetí řádek je (-2) násobkem čtvrtého řádku

```
A4 = 3×4
    -1     1     2     4
     0     1     1     2
     0     0     1     1
```

Poslední matice je horní lichoběžníková (všechny prvku na hlavní diagonále jsou různé od nuly a všechny prvky pod hlavní diagonálou jsou rovny nule) matice. Víme že hodnost takové matice je rovna počtu jejích řádků. Rovnost poslední matice je tedy rovna třem a teda h(A4) = 3.

Ukázkový příklad 2 – Určeme hodnost matice

B = 3x3

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & X+4 & 2X-2 \\ -1 & X-2 & X^2+1 \end{matrix}$$

*Řešení: K určení hodnosti matice **B** použijeme Gaussův algoritmus:*

B1 = 3x3

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & X & 2X \\ 0 & X & X^2 \end{matrix}$$

B2 = 3x3

$$\begin{matrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & X & 2X \\ 0 & 0 & X\,(X-2) \end{matrix}$$

Z poslední matice, která má pro každé X ∈ R stejnou hodnost jako matice B je vidět:

Jestliže X = 0 potom h(B) = 1

Jestliže X = 2 potom h(B) = 2

Jestliže X ≠ 0 a současně X ≠ 2 potom h(B) = 3

Cvičení

1 – Ve cvičeních určete hodnosti daných matic

a

A = 2×2

$$\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

b

B = 2×2

$$\begin{matrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{matrix}$$

c

C = 2×3

$$\begin{matrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$

d

D = 3×3

$$\begin{matrix} 2 & 5 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 19 & -14 \end{matrix}$$

e

E = 4×4

$$\begin{matrix} 2 & -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

2 – Ve cvičeních určete hodnosti daných matic v závislosti na parametru *X ∈ R*

a

a = 2x2

$$\begin{matrix} -3 & 2 \\ 4 & X \end{matrix}$$

b

b = 3x3

$$\begin{matrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & X \end{matrix}$$

c

c = 3x3

$$\begin{matrix} 2 & X & 0 \\ -2 & 1 & 2X \\ 2X & X^2 - X - 1 & 0 \end{matrix}$$

Determinanty

Ukázkový příklad 1 – Vypočteme determinanty matic

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3, & -8 \\ 2, & 5 \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2, & -1, & 2 \\ 3, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \end{vmatrix}$$

Řešení: Determinant D1 druhého stupně vypočteme jako rozdíl součinu prvků na hlavní diagonále a součinu prvků na vedlejší diagonále

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3, & -8 \\ 2, & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-8) \cdot 2 = 31$$

Determinant D2 třetího stupně vypočteme použitím Sarrusova pravidla, tj. pomocí schématu:

$$\begin{matrix} + & + & + & & - & - & - \\ \searrow & \searrow & \searrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \\ 2 & -1 & 2 & 2 & -1 & & \\ 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & & \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & & \end{matrix}$$

Tedy

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2, & -1, & 2 \\ 3, & 1, & 1 \\ 1, & 1, & 2 \end{vmatrix} = [4 + (-1) + 6] - [2 + 2 + (-6)] = 11$$

Ukázkový příklad 2 – Vypočteme determinant matice

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3, & 2 \\ 4, & 0, & 3, & -1 \\ 3, & 2, & 1, & -2 \end{vmatrix}$$

Řešení: Daný determinant matice vypočteme rozvojem podle některého řádku, popř, sloupce. Protože ve druhém sloupci jsou dva prvky rovny nule, rozvineme daný determinant podle tohoto sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1, & 0, & 2, & 3 \\ 2, & 1, & 3, & 2 \\ 4, & 0, & 3, & -1 \\ 3, & 2, & 1, & -2 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 2, & 3, & 2 \\ 4, & 3, & -1 \\ 3, & 1, & -2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 4, & 3, & -1 \\ 3, & 1, & -2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 2 \\ 3, & 1, & -2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 2, & 3, & 2 \\ 4, & 3, & -1 \end{vmatrix} = 0 + 1 \cdot (-10) + 0 + 2 \cdot (-7) = -24$$

Příslušné determinanty třetího stupně jsme vypočetli Sarrusovým pravidlem (první a třetí z těchto determinantů samozřejmě počítat nemusíme).

Ukázkový příklad 3 – Vypočteme determinant matice

$$\begin{vmatrix} 2, & 3, & -2, & 2 \\ 5, & 6, & -3, & 4 \\ 3, & 4, & -3, & 2 \\ -2, & 5, & 3, & 3 \end{vmatrix}$$

Řešení: Kdybychom tentokrát rozvinuli daný determinant podle některého řádku nebo sloupce, nemuseli bychom počítat čtyři determinanty třetího stupně. Abychom se tomu vyhnuli, upravíme nejdříve počítaný determinant tak, aby v některém řádku nebo sloupci byly až na jeden prvek samé nuly. V rozvoji podle tohoto řádku nebo sloupce pak bude jediný nenulový sčítanec:

1 – Ke třetímu sloupci jsme přičetli první sloupec a ke čtvrtému sloupci jsme přičetli (-1) násobek prvního sloupce. Druhý sloupec jsme vynásobili číslem 2 (protože tato úprava hodnotu determinantu zdvojnásobí museli jsme nový determinant současně vynásobit číslem ½) a takto upravenému druhému sloupci jsme přičetli (-3) násobek prvního sloupce

$$\frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 2, & 0, & 0, & 0 \\ 5, & -3, & 2, & -1 \\ 3, & -1, & 0, & -1 \\ -2, & 16, & 1, & 5 \end{vmatrix}$$

2 – Determinant jsme rozvinuli podle prvního řádku

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}-3, & 2, & -1\\ -1, & 0, & -1\\ 16, & 1, & 5\end{vmatrix} = -24.$$

Ukázkový příklad 4 – Vypočteme determinant matice

$$\begin{vmatrix} 1, & -1, & 3, & 2 \\ 2, & 1, & 2, & 1 \\ -1, & 3, & 1, & 2 \\ 2, & 2, & 3, & 2 \end{vmatrix}$$

Řešení: Výpočet daného determinantu tentokrát provedeme na výpočet determinantu horní trojúhelníkové matice:

1 – Ke čtvrtému řádku jsme přičetli (-1) násobek druhého řádku. Ke druhému řádku resp. třetímu řádku jsme pak přičetli (-2) násobek prvního řádku resp. první řádek

$$\begin{vmatrix} 1, & -1, & 3, & 2 \\ 0, & 3, & -4, & -3 \\ 0, & 2, & 4, & 4 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \end{vmatrix}$$

2 – Prohodili jsme druhý a čtvrtý řádek (protože tato úprava změní znaménko determinantu museli jsme současně nový determinant vynásobit číslem (-1))

$$(-1) \cdot \begin{vmatrix} 1, & -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 2, & 4, & 4 \\ 0, & 3, & -4, & -3 \end{vmatrix}$$

3 – Třetí řádek jsme vynásobili číslem ½ (současně jsme museli nový determinant vynásobit číslem 2), jinak řečeno, ze třetího řádku jsme před determinant „vytkli“ číslo 2. Ke čtvrtému řádku jsme pak přičetli 7 násobek upraveného třetího řádku.

$$-2 \cdot \begin{vmatrix} 1, & -1, & 3, & 2 \\ 0, & 1, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{vmatrix}$$

4 – Determinant horní trojúhelníkové matice je roven součinu prvků hlavní diagonále

$$-2$$

Cvičení

1 – Ve cvičeních vypočtete determinanty daných matic

a

$$\begin{vmatrix} -1, & -3 \\ -2, & 5 \end{vmatrix}$$

b

$$\begin{vmatrix} -1, & -3 \\ -2, & 5 \end{vmatrix}$$

c

$$\begin{vmatrix} 2, & -1 \\ 4, & -2 \end{vmatrix}$$

d

$$\begin{vmatrix} -1, & 3 \\ 5, & 2 \end{vmatrix}$$

e

$$\begin{vmatrix} 1, & 6, & -8 \\ 2, & 9, & 7 \\ 3, & -1, & 0 \end{vmatrix}$$

f

$$\begin{vmatrix} -2, & 1, & 2 \\ 2, & 0, & 3 \\ 1, & 1, & 2 \end{vmatrix}$$

g

$$\begin{vmatrix} 2, & 1, & 0, & 3 \\ 0, & -1, & -2, & 0 \\ 0, & 3, & -3, & 1 \\ 1, & 2, & 0, & -1 \end{vmatrix}$$

h

$$\begin{vmatrix} -2, & 1, & 2, & 1 \\ 1, & 2, & 2, & 1 \\ -1, & 2, & 1, & 2 \\ 1, & -1, & 4, & 1 \end{vmatrix}$$

Soustavy lineárních algebraických rovnic

Ukázkový příklad 1 – Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 &= 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 4. \end{aligned} \tag{1}$$

Řešení: Danou soustavu budeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Tato metoda spočívá ve dvou krocích:

1 – V prvním kroku upravíme matici soustavy a také rozšířenou matici soustavy na horní lichoběžníkový tvar (matice „končící“ svislou čarou je matice soustavy, „celá“ matice je rozšířená matice soustavy):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 1, & -1, & -1 & 0 \\ 1, & 2, & -1, & 1 & 5 \\ 2, & -1, & 1, & 2 & 1 \\ -1, & 1, & 1, & -1 & 4 \end{array}\right)$$

1.1 – Ke druhému resp. třetímu resp. čtvrtému řádku jsme přičetli (-1) násobek resp. (-2) násobek resp. 1 násobek prvního řádku

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 1, & -1, & -1 & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 2 & 5 \\ 0, & -3, & 3, & 4 & 1 \\ 0, & 2, & 0, & -2 & 4 \end{array}\right)$$

1.2 – Ke třetímu resp. čtvrtému řádku jsme přičetli 3 násobek resp. (-2) násobek druhého řadku

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1, & 1, & -1, & -1 & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 2 & 5 \\ 0, & 0, & 3, & 10 & 16 \\ 0, & 0, & 0, & -6 & -6 \end{array}\right).$$

Hodnost h matice soustavy je 4 a hodnost h' rozšířené matice soustavy je také 4. To podle Frobenový věty znamená, že daná soustava má alespoň jedno řešení. Přitom počet n neznámých je 4. Soustava (1) má právě jedno řešení.

Výsledné rozšířené matici odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 0, \\ x_2 + 2x_4 &= 5, \\ 3x_3 + 10x_4 &= 16, \\ - 6x_4 &= -6. \end{aligned} \tag{2}$$

Soustavy (1) a (2) jsou ekvivalentní soustavy a mají stejná řešení.

2 – *Druhým krokem Gaussovy eliminační metody je tzv „zpětný chod", tj. nalezení řečení soustavy (2) následujícím způsobem:*
Z poslední rovnice soustavy (2) vypočteme x4 = 1, dosadíme do třetí rovnice a vypočteme x3=2, dále x3 a x4 dosadíme do druhé rovnice a vypočteme x2 = 3 a konečně za x2, x3 a x4 dosadíme do první rovnice a vypočteme x1 = 0.

Jediným řešením soustavy rovnic (1) je tedy vektor (0,3,2,1).

Ukázkový příklad 2 – Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= -4, \\ 5x_1 + 2x_2 + 4x_4 &= 4. \end{aligned}$$

Řešení:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1, & 2, & 1, & -1 & -1 \\ 0, & -1, & -1, & 3 & 3 \\ 1, & 3, & 2, & -4 & -4 \\ 5, & 2, & 0, & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1, & 2, & 1, & -1 & -1 \\ 0, & -1, & -1, & 3 & 3 \\ 0, & 5, & 3, & -5 & -5 \\ 0, & 12, & 5, & -1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1, & 2, & 1, & -1 & -1 \\ 0, & -1, & -1, & 3 & 3 \\ 0, & 0, & -2, & 10 & 10 \\ 0, & 0, & -7, & 35 & 35 \end{array}\right)$$

1 – Čtvrtý řádek jsem vynechali (je 7/2 – násobkem třetího řádku) a třetí řádek jsme vydělili číslem -2

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1, & 2, & 1, & -1 & -1 \\ 0, & -1, & -1, & 3 & 3 \\ 0, & 0, & 1, & -5 & -5 \end{array}\right)$$

Pro hodnosti matice soustavy *h* a rozšířené matice soustavy *h´* a počet neznámých n platí *h = h´ = 3*, *n = 4*. Daná soustava má proto nekonečně mnoho řešení závislých na n – h = 4 – 3 = 1 parametru.

Výsledné rozšířené matici odpovídá soustava lineárních rovnic

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= -1, \\ - x_2 - x_3 + 3x_4 &= 3, \\ x_3 - 5x_4 &= -5. \end{aligned}$$

Všechna řešení získáme tak, že neznámou x4 volime libovolně tj. x4 = α (α Є R je parametr), a z třetí, druhé a první rovnice rovnice soustavy uvedené výše pak postupně jednoznačně vypočteme:

$$x_3 = -5 + 5\alpha, \quad x_2 = 2 - 2\alpha, \quad x_1 = 0$$

Řešeními soustavy jsou proto právě všechny vektory

$$(0,\, 2 - 2\alpha,\, -5 + 5\alpha,\, \alpha) \in \mathbf{R}^4, \quad \text{kde} \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Řešení můžeme zapsat také ve tvaru

$$(0, 2, -5, 0) + \alpha(0, -2, 5, 1) \in \mathbf{R}^4, \quad \text{kde} \quad \alpha \in \mathbf{R}.$$

Ukázkový příklad 3 – Řešte soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 - x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -1, \\ 4x_1 - 5x_2 &= 2. \end{aligned}$$

Řešení

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array}\\
\left(\begin{array}{rrr|r} 3, & -1, & -1 & 0 \\ 2, & 3, & -2 & -1 \\ 4, & -5, & 0 & 2 \end{array}\right)
\end{array}$$

Zaměníme pořadí sloupců – pro vyšetření hodnosti matice je tato úprava ekvivalentní úpravou při zpětném chodu si však musíme uvědomit, že máme změněno pořadí neznámých.

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\\
\left(\begin{array}{rrr|r} -1, & -1, & 3 & 0 \\ -2, & 3, & 2 & -1 \\ 0, & -5, & 4 & 2 \end{array}\right)
\end{array} \sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\\
\left(\begin{array}{rrr|r} -1, & -1, & 3 & 0 \\ 0, & 5, & -4 & -1 \\ 0, & -5, & 4 & 2 \end{array}\right)
\end{array} \sim$$

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} x_3 & x_2 & x_1 \end{array}\\
\left(\begin{array}{rrr|r} -1, & -1, & 3 & 0 \\ 0, & 5, & -4 & -1 \\ 0, & 0, & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{array}$$

Pro hodnosti matice soustavy h a rozšířené matice soustavy h´ platí h´ = 3, h = 2 tj h nerovná se h´, daná soustava proto nemá žádné řešení (poslednímu rádku výsledné rozšířené matice odpovídá sporná rovnice 0x3 + 0x2 + 0x1 = 1).

Cvičení

1 – Ve cvičeních řešte dané soustavy rovnic

a

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= -3 \\ x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned}$$

b

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 &= 2 \end{aligned}$$

c

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 &= 11 \end{aligned}$$

d

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5 \\ 5x_1 - 3x_2 - x_3 &= -12 \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= -5 \\
2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \\
7x_1 - x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 15 \\
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

f

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 5 \\
3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= -3 \\
9x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 10x_4 &= 9
\end{aligned}
$$

g

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_5 &= -2 \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\
x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\
x_3 + x_4 + x_5 &= -1 \\
x_4 + x_5 &= -2
\end{aligned}
$$