

ELEKTRONICKÁ SKRIPTA STUDIJNÍ OPORA

**ŘEŠENÉ PŘÍKLADY
Z FYZIKÁLNÍCH A MECHANICKÝCH
VLASTNOSTÍ DŘEVA**



Řešené příklady z fyzikálních a mechanických vlastností dřeva


doc. Ing. Vlastimil Borůvka,
PhD., Dipl. Mgmt.



Fakulta lesnická
a dřevařská

2022



© doc. Ing. Vlastimil Borůvka,
PhD., Dipl. Mgmt. 
Česká zemědělská univerzita v Praze
Fakulta lesnická a dřevařská
Katedra zpracování dřeva a biomateriálů
Kamýcká 129, 165 00 Praha 6 – Suchbátka

Lektoroval:

doc. Ing. Richard Hřeka, PhD.,
KND DF TU vo Zvolene

Vážení čtenáři,

dostává se Vám do „rukou“ elektronická publikace „Řešené příklady z fyzikálních a mechanických vlastností dřeva“, která zastrešuje svým obsahem náplň všech předmětů s touto problematikou vyučovaných na FLD ČZU v Praze.

Zkušenosti s výukou „Nauky o dřevě“, a to zejména pak speciálně vlastností dřeva ukazují, že nejvíce problémů způsobuje řešení praktických příkladů. Proč je tomu tak? Při řešení příkladů nestačí vědět pouze teorii. Kromě znalosti definic a vzorců je třeba prokázat pochopení jejich souvislostí, elementární matematickou zručnost a někdy i trochu důvtipu. Základem úspěšného řešení problému je tedy právě jeho pochopení...

V publikaci se vyskytují pouze dá se říci ty nejjednodušší příklady řešené přímo na cvičeních z relevantních předmětů vyučovaných na FLD s tím, že je upozorněno i na časté chyby studentů, na co si je potřebné dávat pozor, apod. Jedná se tedy pouze o opravdu jednoduchou studijní oporu pro cvičení s relevantní předmětnou náplní problematiky. Řešení některých příkladů je mnohdy zjednodušeno a někdy lze k výsledku dospět rychlejší a možná i spolehlivější cestou.

Publikace vznikla jako bezprostřední reakce v době „pandemie“ v roce 2020, reagovala na nedostatek elektronických výukových materiálů pro studenty, a neprošla jazykovou korekturou. Skripta existují i ve standardní verzi s přiděleným ISBN, vytvořené ve Word-u, se snímky příkladů vytvořených v PowerPoint-u, a následným konečným uložením do pdf formátu.

OBSAH

Příklady č. 1 až 11 a 14 jsou primárně určeny pro studenty dřevařských oborů a příklady č. 12, 13 a 15 pro studenty lesnických oborů. Konkrétní zaměření příkladů viz info vpravo. Za řešenými příklady následují zadání čtyř typových příkladů i s uvedením výsledků pro ověření správnosti výpočtů.

- příklad č. 1: konvenční hustota, sesychání/bobtnání, vlhkost dřeva (snímek 5)
- příklad č. 2: vlhkost dřeva/vzduchu, izoterma (snímek 15)
- příklad č. 3: teplo na ohřev vlhkého dřeva, vztah mezi hustotou při dané vlhkosti a v absolutně suchém stavu, objemové bobtnání (snímek 22)
- příklad č. 4: vztah mezi hustotou při dané vlhkosti a v a.s. stavu, vlhkost na mezi nasycení buněčných stěn a na mezi nasáklivosti (snímek 29)
- příklad č. 5: rychlost šíření zvuku, dynamický modul pružnosti, hmotnost vody ve dřevě (snímek 35)
- příklad č. 6: tlakové namáhání, vliv vlhkosti (snímek 41)
- příklad č. 7: zatěžování hranolů „vedle sebe“ tlakovou silou (snímek 45)
- příklad č. 8: zatěžování hranolů „za sebou“ tlakovou silou (snímek 49)
- příklad č. 9: tahové namáhání, prodloužení, vliv vlhkosti (snímek 53)
- příklad č. 10: ohybové namáhání (statické, trvalé) - (snímek 58)
- příklad č. 11: vlhkostní a mechanické namáhání (deformace) - (snímek 63)
- příklad č. 12: tlakové namáhání (snímek 68)
- příklad č. 13: rozměrové změny způsobené bobtnáním dřeva (snímek 72)
- příklad č. 14: rozměrové změny způsobené sesycháním dřeva (snímek 77)
- příklad č. 15: vlhkost dřeva, hmotnost dřeva v a.s. stavu (snímek 81)
- neřešené příklady: (snímek 87)

Příklad č. 1

konvenční hustota,
sesychání/bobtnání, vlhkost dřeva

Zadání:

Stanovte konvenční hustotu dřeva za daných podmínek:

- jsou dány „nulové“ rozměry, tj. v absolutně suchém stavu,
 $t_g \times \text{rad} \times l = 20 \times 20 \times 30 \text{ mm}$,
- koeficient částečného sesychání v tangenciálním směru
 $\beta_{10 t_g} = 3,0 \%$,
- při relativní vlhkosti 15 % je hmotnost vzorku 10 g.

Pro všechny ostatní údaje uvažujte obecně udávané hodnoty, poměry a vztahy.

Řešení:

Konvenční hustota udává kolik suché dřevní hmoty (hmotnost dřeva v absolutně suchém stavu) se nachází v maximálně nabobtnalém objemu dřeva, takže platí:

$$\rho_k = \frac{m_0}{V_{\max}}$$

Nejprve si vypočítáme hmotnost dřeva v a.s. stavu, přičemž vycházíme ze vztahu pro výpočet relativní vlhkosti dřeva.

$$w_{rel} = \frac{m_w - m_0}{m_w}$$

Ze vzorce si vyjádříme hmotnost dřeva v a.s. stavu.

$$m_0 = m_w \cdot (1 - w_{rel}) = 10 \cdot (1 - \mathbf{0,15}) = 8,5 \text{ g}$$

Pozor: Jako poměrné číslo, protože ve vzorci pro vlhkost není $\times 100$.

Celkové sesychání dřeva v tangenciálním směru, tj. sesychání v celém rozsahu „hygroskopivity“, což je od 0 do cca průměrně 30 %, je tedy v tomto případě trojnásobek hodnoty $\beta_{10\ tg}$, což je sesychání v rozsahu od 0 do 10 % (sesychání na 1 % změny vlhkosti je 0,3 %). A dostaneme tedy $\beta_{tg} = 9,0 \%$.

*Použijeme známý poměr sesychání v jednotlivých směrech a
dopočítáme % sesychání v radiálním a podélném směru.*

Platí tedy:

$$tg : rad : l = 20 : 10 : 1 = 9,0 : 4,5 : 0,45$$

Máme už tedy k dispozici údaje pro sesychání, které je potřebné přepočítat na bobtnání podle vztahu:

$$\alpha = \frac{100 \cdot \beta}{100 - \beta}$$

Pro bobtnání v jednotlivých směrech potom platí:

$$\alpha_{tg} = \frac{100 \cdot 9}{100 - 9} \cong 9,890 \%$$

$$\alpha_{rad} = \frac{100 \cdot 4,5}{100 - 4,5} \cong 4,712 \%$$

$$\alpha_l = \frac{100 \cdot 0,45}{100 - 0,45} \cong 0,452 \%$$

Nyní můžeme vypočítat maximální rozměrové změny v jednotlivých směrech:

$$tg: \quad 20 + (0,09890 \times 20) \cong 21,978 \text{ mm}$$

$$rad: \quad 20 + (0,04712 \times 20) \cong 20,942 \text{ mm}$$

$$l: \quad 30 + (0,00452 \times 30) \cong 30,136 \text{ mm}$$

Pozor na práci s procenty!

Tím pádem už lze vypočítat maximální objem, z titulu jednotek je vhodný převod rozměrů na cm a potom jejich vzájemné vynásobení. Dostaneme pak objem $V_{max} \cong 13,870 \text{ cm}^3$.

Už máme k dispozici hmotnost dřeva v a.s. stavu i maximální objem, a pro konvenční hustotu tedy platí:

$$\rho_k = \frac{8,5}{13,87} \cong 0,613 \text{ g/cm}^3 \cong 613 \text{ kg/m}^3$$

Příklad č. 2

vlhkost dřeva/vzduchu,
izoterma

Zadání:

Máme 176 kg dřeva o vlhkosti 76 %. Kolik vody se z něho odpaří, když dosáhne stav vlhkostní rovnováhy v prostředí (65/20), tj. s vlhkostí vzduchu 65 % a teplotou 20 °C. Dosáhnutou (rovnovážnou) vlhkost ověřte výpočtem s použitím izotermy.

Sumarizace zadání:

Známe:

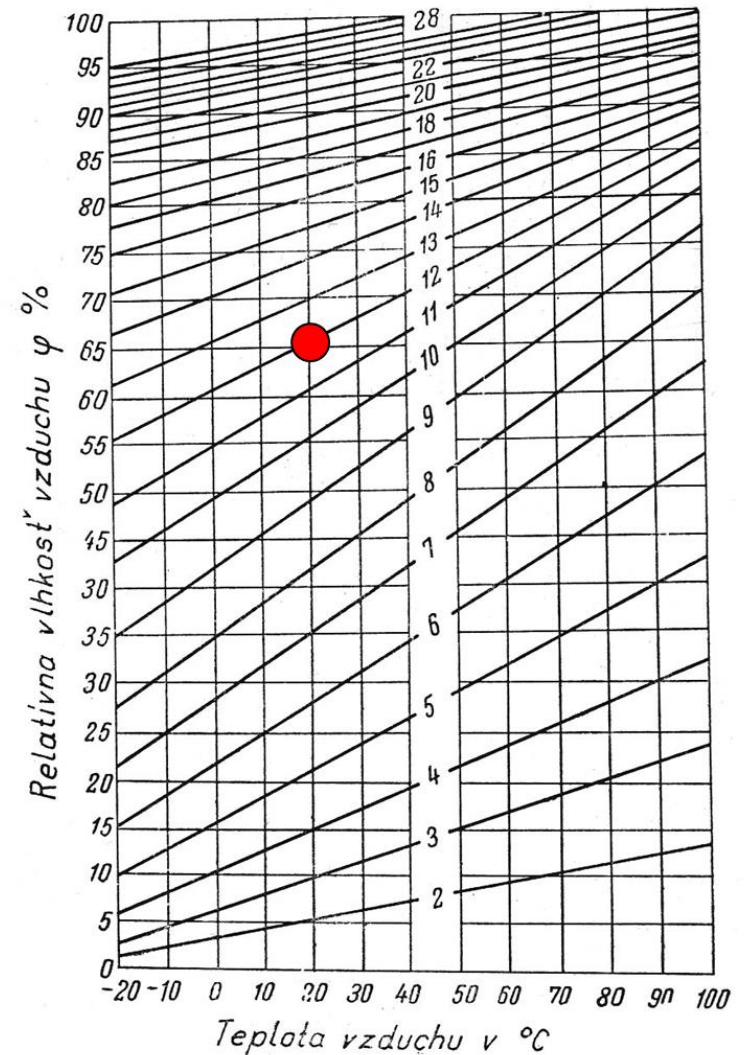
$$m_{w1} = 176 \text{ kg}$$

$$w_{a1} = 76 \%$$

Při parametrech prostředí 65/20 se ve dřevě ustálí rovnovážná vlhkost cca 12 %, tj. $w_{a2} = 12 \%$, kterou následně ověříme.

Neznáme:

$$\Delta m_{\text{H}_2\text{O}} = ?$$



Řešení:

Využijeme vzorec pro absolutní vlhkost dřeva (podíl vody ve dřevě a hmotnosti dřeva v a.s. stavu), tj.

$$w_a = \frac{m_w - m_0}{m_0}$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme hmotnost dřeva v a.s. stavu, tj.

$$m_0 = \frac{m_w}{1 + w_a}$$

Hmotnost dřeva v a.s. stavu máme při obou vlhkostních stavech stejnou, takže určitě platí:

$$m_0 = \frac{m_{w1}}{1 + w_{a1}} = \frac{m_{w2}}{1 + w_{a2}}$$

Z výše uvedeného poměru si vyjádříme neznámou hmotnost dřeva při druhém vlhkostním stavu a dosadíme údaje, tj.

$$m_{w2} = \frac{m_{w1} \cdot (1 + w_{a2})}{1 + w_{a1}} = \frac{176 \cdot (1 + \mathbf{0,12})}{1 + \mathbf{0,76}} = 112 \text{ kg}$$

Pro hmotnost odpařené vody potom platí:

$$\Delta m_{H_2O} = m_{w1} - m_{w2} = 176 - 112 = 64 \text{ kg}$$

Pozor: *Jako poměrná čísla, protože ve vzorci pro vlhkost není $\times 100$.*

Pro ověření dosáhnuté rovnovážné vlhkosti použijeme De Boer – Zwicker izotermu, kterou musíme nejprve zlogaritmovat a následně si vyjádříme vlhkost w , tj.

$$\ln \frac{1}{\varphi} = A \cdot e^{-B \cdot w}$$

$$\ln \left(\ln \frac{1}{\varphi} \right) = \ln A - B \cdot w$$

$$w = \frac{\ln A - \ln \left(\ln \frac{1}{\varphi} \right)}{B},$$

Pozor: Jako poměrné číslo, tj. **0,65**.

přičemž A a B jsou parametry závislé od termodynamické teploty T , tj.

$$t = 20 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$T = 273,15 + 20 = 293,15 \text{ K}$$

$$A = 7,7317 - 0,014348 \cdot T \cong 3,525584 \text{ K}$$

$$B = 0,0087 + 0,000567 \cdot T \cong 0,174916 \text{ K}$$

Ted' už můžeme dosadit do vztahu pro vlhkost, tj.

$$w = \frac{1,260046 - (-0,84215)}{0,174916} \cong 12,0 \%$$

Poznámka: Při druhé části příkladu by jste dostali k dispozici rovnice pro výpočet parametrů A a B.

Příklad č. 3

teplo na ohřev vlhkého dřeva, vztah mezi hustotou při dané vlhkosti a v absolutně suchém stavu, objemové bobtnání

Zadání:

Kolik tepla v MJ spotřebujeme na ohřátí $4,5 \text{ m}^3$ bukového dřeva o vlhkosti 20 % při zvýšení teploty z 20 na $80 \text{ }^\circ\text{C}$?

K dispozici dostanete rovnici pro závislost měrné tepelné kapacity dřeva od teploty a hodnotu měrné tepelné kapacity vody. Hustotu bukového dřeva v a.s. stavu odhadněte. Hodnotu objemového bobtnání buď odhadněte, případně použijte známý empirický vztah. Neuvažujte s eliminací sorpčního tepla.

Sumarizace zadání:

Známe:

$$w = 20 \%$$

$$\Delta\vartheta = 80 - 20 = 60 \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$c_{H_2O} = 4182 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$c_0 = 1,571 + 0,00277 \cdot \left(\frac{\Delta\vartheta}{2} \right) [\text{kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$$

Pozor: Jedná se o zjednodušení vzhledem na lineární závislost...

$$\alpha_V = 0,28 \cdot \rho_0$$

Odhadnuté:

$$\rho_0 = 684 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Řešení:

Využijeme vzorec pro vztah mezi hustotou dřeva v absolutně suchém stavu a při dané vlhkosti, plus empirický vztah pro objemové bobtnání, tj.

$$\rho_w = \rho_0 \cdot \frac{1 + w}{1 + \alpha_V \cdot \frac{w}{W_{BNV}}} = 684 \cdot \frac{1 + 0,2}{1 + 0,28 \cdot 0,684 \cdot \frac{20}{30}} \cong 728 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Následně můžeme vypočítat hmotnost dřeva ze vztahu:

$$\rho_w = \frac{m_w}{V_w} \Rightarrow m_w = \rho_w \cdot V_w = 728 \cdot 4,5 = 3276 \text{ kg}$$

Pozor: Při vlhkosti nad BNV použijeme celou hodnotu objemového bobtnání.

Do vzorce pro výpočet měrné tepelné kapacity suchého dřeva dosadíme adekvátní teplotní rozdíl a dostaneme hodnotu $1,654 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Následně využijeme tzv. „směšovací“ pravidlo pro výpočet měrné tepelné kapacity vlhkého dřeva, tj.

$$c_w = \frac{c_0 + w \cdot c_{H_2O}}{1 + w} = \frac{1,654 + 0,2 \cdot 4,182}{1 + 0,2} \cong 2,075 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

Nyní už můžeme vypočítat teplo na ohřev vlhkého dřeva podle vztahu:

$$Q_w = m_w \cdot c_w \cdot \Delta\vartheta = 3276 \cdot 2,075 \cdot (80 - 20) = \\ = 407862 \text{ kJ} \cong 407,9 \text{ MJ}$$

Nemusíme využít „směšovací“ pravidlo, ale můžeme vypočítat samostatně teplo na ohřev suchého dřeva a teplo na ohřev vody. Nejprve využijeme vzorec pro absolutní vlhkost dřeva, tj.

$$w_a = \frac{m_w - m_0}{m_0}$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme hmotnost dřeva v a.s. stavu, tj.

$$m_0 = \frac{m_w}{1 + w_a} = \frac{3276}{1 + 0,2} = 2730 \text{ kg}$$

Množství vody ve dřevě je poté jednoduše:

$$m_{H_2O} = m_w - m_0 = 3276 - 2730 = 546 \text{ kg}$$

Pro teplo na ohřev tedy platí:

$$\begin{aligned} Q_0 &= m_0 \cdot c_0 \cdot \Delta\vartheta = 2730 \cdot 1,654 \cdot (80 - 20) = \\ &= 270925 \text{ kJ} \cong 270,9 \text{ MJ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_{H_2O} &= m_{H_2O} \cdot c_{H_2O} \cdot \Delta\vartheta = 546 \cdot 4,182 \cdot (80 - 20) = \\ &= 137002 \text{ kJ} \cong 137,0 \text{ MJ} \end{aligned}$$

Teplo na ohřev vlhkého dřeva je poté jejich součtem, tj.

$$Q_w = Q_0 + Q_{H_2O} = 270,9 + 137,0 = 407,9 \text{ MJ}$$

Příklad č. 4

vztah mezi hustotou při dané vlhkosti a v a.s. stavu, vlhkost na mezi nasycení buněčných stěn a na mezi nasáklivosti

Zadání:

Při jaké minimální vlhkosti se smrkové dřevo ponoří ve vodě a je to vůbec možné?

K dispozici dostanete hodnotu hustoty absolutně suchého dřeva a redukovanou hustotu dřeva v čerstvém stavu, tj. tzv. konvenční hustotu. Hustotu dřevní substance musíte znát. Stačí použít vypočet přibližný, není nutné použít exaktní, tj. založený na Archimédově zákoně.

Sumarizace zadání:

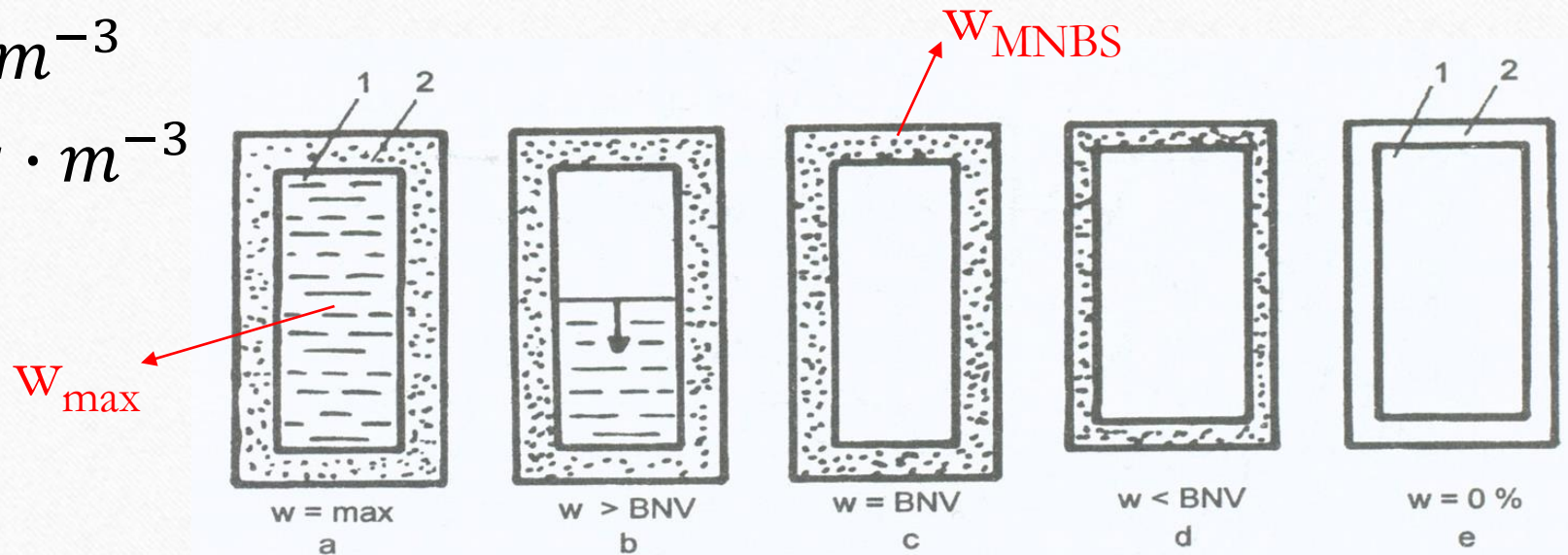
Známe:

$$\rho_0 = 392 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{r\check{c}} = \rho_K = 338 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_S = 1540 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\rho_{H_2O} = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$



Řešení:

Dřevo se ve vodě ponoří pokud má vyšší hustotu nežli má voda. Využijeme tedy vzorec pro vztah mezi hustotou dřeva v absolutně suchém stavu a při dané vlhkosti, plus empirický vztah pro objemové bobtnání, tj.

$$\rho_w = \rho_0 \cdot \frac{1 + w}{1 + 0,28 \cdot \rho_0}$$

Ze vztahu si vyjádříme vlhkost při které dojde k ponoření dřeva ve vodě:

$$w = \frac{\rho_w \cdot (1 + 0,28 \cdot \rho_0) - \rho_0}{\rho_0} = \frac{1000 \cdot (1 + 0,28 \cdot 0,392) - 392}{392} \cong \cong 1,83 \cong 183 \%$$

Pro vlhkost na mezi nasycení buněčných stěn platí:

$$w_{MNBS} = \left(\frac{1}{\rho_K} - \frac{1}{\rho_0} \right) \cdot \rho_{H_2O} = \left(\frac{1}{0,338} - \frac{1}{0,392} \right) \cdot 1,0 \cong 0,41 \cong 41 \%$$

Pro vlhkost na mezi nasáklivosti platí:

$$w_{max} = \left(\frac{1}{\rho_K} - \frac{1}{\rho_S} \right) \cdot \rho_{H_2O} = \left(\frac{1}{0,338} - \frac{1}{1,54} \right) \cdot 1,0 \cong 2,31 \cong 231 \%$$

Pokud bychom neměli k dispozici konvenční hustotu, tak bychom mohli mez nasáklivosti vypočítat přibližně takto:

$$\begin{aligned} w_{max} &= w_{MNBS} + \frac{\rho_S - \rho_0}{\rho_S \cdot \rho_0} \cdot \rho_{H_2O} \cong 0,30 + \frac{1540 - 392}{1540 \cdot 392} \cdot 1000 \cong \\ &\cong 2,2 \cong 220 \% \end{aligned}$$

V obou případech je vypočítaná hodnota meze nasáklivosti (220 nebo 231 %) vyšší než vlhkost při které dojde k ponoření dřeva ve vodě, tj. 183 %.

Příklad č. 5

rychlost šíření zvuku ve dřevě,
dynamický modul pružnosti, hmotnost
vody ve dřevě

Zadání:

Vypočítejte rychlost šíření zvuku a zároveň i tzv dynamický modul pružnosti smrkového dřeva v podélném směru za daných podmínek. Kostkou dřeva o hraně 60 cm a hmotnosti 95 kg proběhla ultrazvuková vlna v daném směru za 125 μs . S korekcí času s ohledem na „nulovou vzdálenost sond neuvažujte“. Kolik je v kostce dřeva vody, když víte, že dosáhla stavu vlhkostní rovnováhy v prostředí s vlhkostí vzduchu 65 % a teplotou 20 °C.

Sumarizace zadání:

Známe:

$$a = 60 \text{ cm}$$

$$m = 95 \text{ kg}$$

$$t = 125 \mu\text{s}$$

$w_a = 12 \%$ (při parametrech prostředí 65/20 se ve dřevě ustálí cca tato rovnovážná vlhkost)

Neznáme:

$$v [m \cdot s^{-1}], E_{dyn} [MPa], m_{vody} [kg] = ?$$

Řešení:

Vypočítáme hustotu dřeva ze vztahu:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{95}{\frac{60 \cdot 60 \cdot 60}{1000000}} \cong 440 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Vypočítáme rychlost šíření zvuku podle vztahu:

$$v = \frac{l}{t} = \frac{\frac{60}{100}}{\frac{125}{1000000}} = 4800 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Dynamický modul pružnosti dřeva potom stanovíme ze vzorce:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$E = v^2 \cdot \rho \text{ [Pa]} = \frac{v^2 \cdot \rho}{1000000} \text{ [MPa]} = \frac{4800^2 \cdot 440}{1000000} \cong \mathbf{10133 \text{ MPa}}$$

Pro výpočet množství vody v kostce dřeva využijeme vzorec pro absolutní vlhkost, tj.

$$w_a = \frac{m_w - m_0}{m_0}$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme hmotnost dřeva v a.s. stavu, tj.

$$m_0 = \frac{m_w}{1 + w_a}$$

Pro hmotnost vody potom platí:

$$m_{\text{vody}} = m_w - m_0 = m_w - \frac{m_w}{1 + w_a} = \frac{m_w \cdot w_a}{1 + w_a} = \frac{95 \cdot 0,12}{1 + 0,12} \cong \mathbf{10,2 \text{ kg}}$$

Poznámka: V příkladu si dávejte pozor na jednotky, převody jednotek, související řády a poměrná čísla. Chyby způsobené takovouto nepozorností jsou potom opravdu drastické...

Příklad č. 6

tlakové namáhání, vliv vlhkosti

Zadání:

Jakou silou v tlaku v kN by se muselo působit na zkušební těleso ze dřeva při vlhkosti 17 % o plošných rozměrech 2×2 cm, aby se dosáhlo takového napětí, které by bylo při vlhkosti 12 % ve výši 60 MPa? Použijte opravný vlhkostní součinitel 0,04 [-].

Řešení:

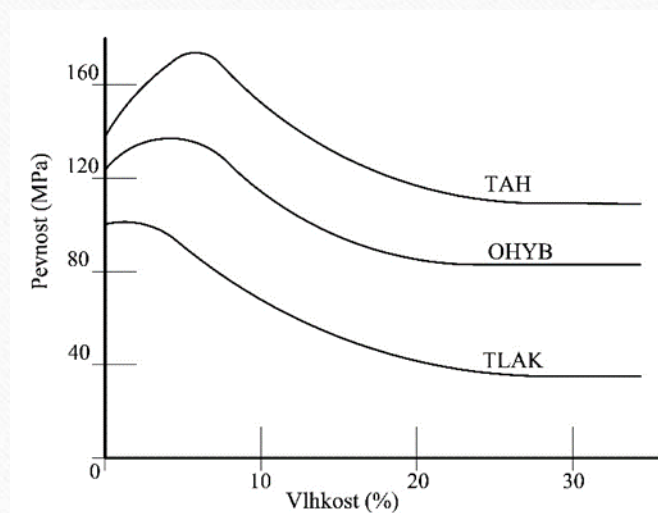
Použijeme vzorec pro přepočet pevnosti platný pro rozsah vlhkosti *od cca 8 do 20 %*, který má tvar:

$$\sigma_{12} = \sigma_w \cdot [1 + \alpha \cdot (w - 12)]$$

Pro naše konkrétní údaje tedy po dosazení platí:

$$\sigma_{17} = \frac{\sigma_{12}}{1 + \alpha \cdot (w - 12)} = \frac{60}{1 + 0,04 \cdot (17 - 12)} = 50 \text{ MPa}$$

Pevnost s rostoucí vlhkostí do MH klesá, a to v uvedeném rozsahu cca lineárně (viz grafické znázornění).



Pro pevnost v tlaku platí jednoduchý vzorec, který má tvar:

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

Pro naše konkrétní údaje tedy po dosazení platí:

$$F_{17} = \sigma_{17} \cdot S = 50 \cdot \mathbf{20 \cdot 20} = 20000 \text{ N} = \mathbf{20 \text{ kN}}$$

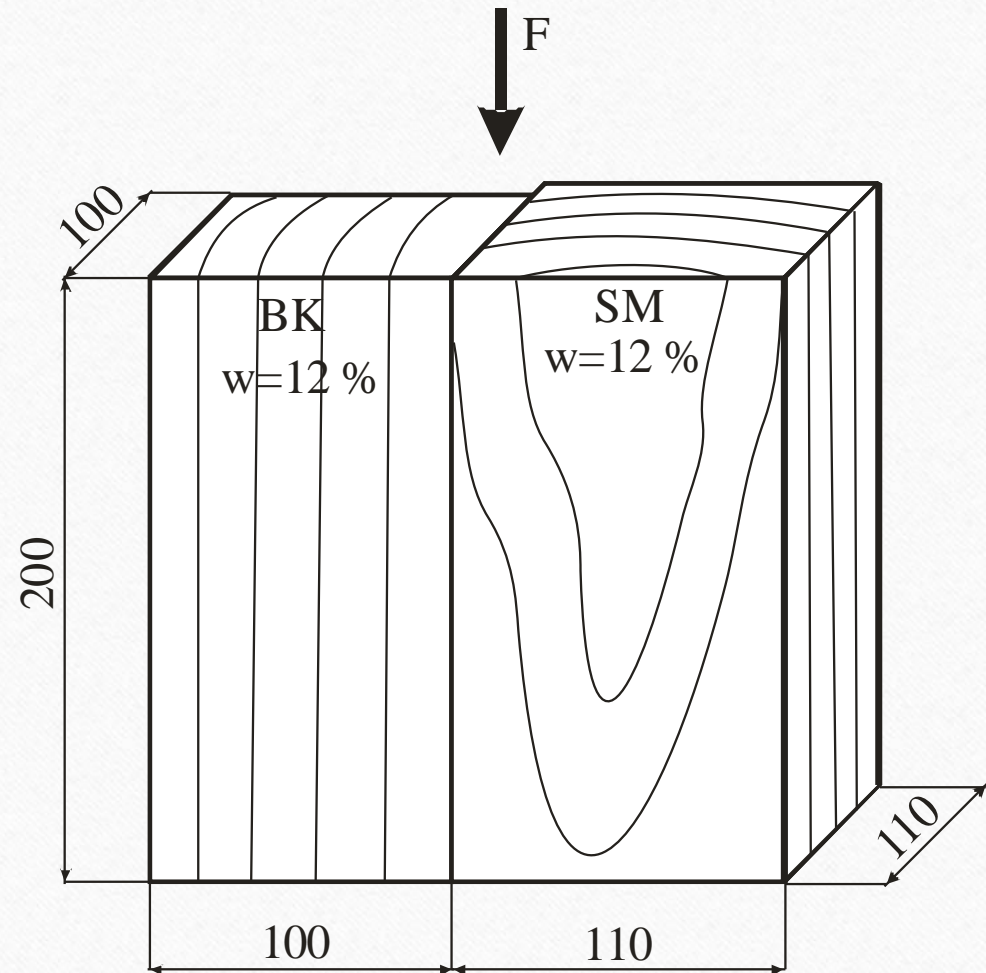
Pozor: *Uvědomit si, že pokud pevnost dosazujeme v MPa, tak rozměry musí být v mm, abychom dostali sílu v N.*

Příklad č. 7

zatěžování hranolů „vedle
sebe“ tlakovou silou

Jaká bude absolutní deformace a napětí v bukovém hranolu o rozměrech $200 \times 100 \times 100$ mm (l×r×t) a smrkovém o rozměrech $200 \times 110 \times 110$ mm (l×r×t) při 12 % vlhkosti, které jsou umístěné vedle sebe a zatížené tlakovou silou 500 kN ve směru vláken.

Vycházíme z předpokladu, že zatěžované hranoly ve směru vláken budou vykazovat stejnou deformaci, ale každý z nich bude přenášet jiné napětí. Dále to, že jsou zatěžované silou po mez úměrnosti. Při výpočtu absolutní deformace (zkrácení) vycházíme z Hookova zákona pro každý hranol. Výsledná síla je daná součtem přenášených sil a výsledná plocha je daná součtem obou ploch soustavy. To značí, že výsledný modul pružnosti soustavy je váženým aritmetickým průměrem modulů zatěžovaných hranolů, přičemž váhami jsou příslušné plochy.



(Do)zadané:

$$E_{12,BK} = 14010 \text{ MPa}$$

$$E_{12,SM} = 9290 \text{ MPa}$$

Řešení:

$$\sigma = \frac{F}{S} = E \cdot \varepsilon = \frac{E_{12,BK} \cdot S_{BK} + E_{12,SM} \cdot S_{SM}}{S_{BK} + S_{SM}} \cdot \frac{\Delta l}{l}$$

$$\begin{aligned} \Delta l = \Delta l_{BK} = \Delta l_{SM} &= \frac{F \cdot l}{E_{12,BK} \cdot S_{BK} + E_{12,SM} \cdot S_{SM}} = \\ &= \frac{500000 \cdot 200}{14010 \cdot 100 \cdot 100 + 9290 \cdot 110 \cdot 110} \cong \mathbf{0,396 \text{ mm}} \end{aligned}$$

$$\sigma_{12,BK} = E_{12,BK} \cdot \varepsilon = E_{12,BK} \cdot \frac{\Delta l}{l} = 14010 \cdot \frac{0,396}{200} \cong \mathbf{27,7 MPa}$$

$$\sigma_{12,SM} = E_{12,SM} \cdot \varepsilon = E_{12,SM} \cdot \frac{\Delta l}{l} = 9290 \cdot \frac{0,396}{200} \cong \mathbf{18,4 MPa}$$

Kontrola napětí pod mezí úměrnosti \Rightarrow

z literatury pro bukové a smrkové dřevo v tlaku podél vláken

$$\sigma_{12,BK} = 56,7 MPa \text{ a } \sigma_{12,SM} = 34,1 MPa \Rightarrow$$

vypočítaná napětí jsou cca 49 % z hodnoty pro buk a cca 54 % pro smrk \Rightarrow

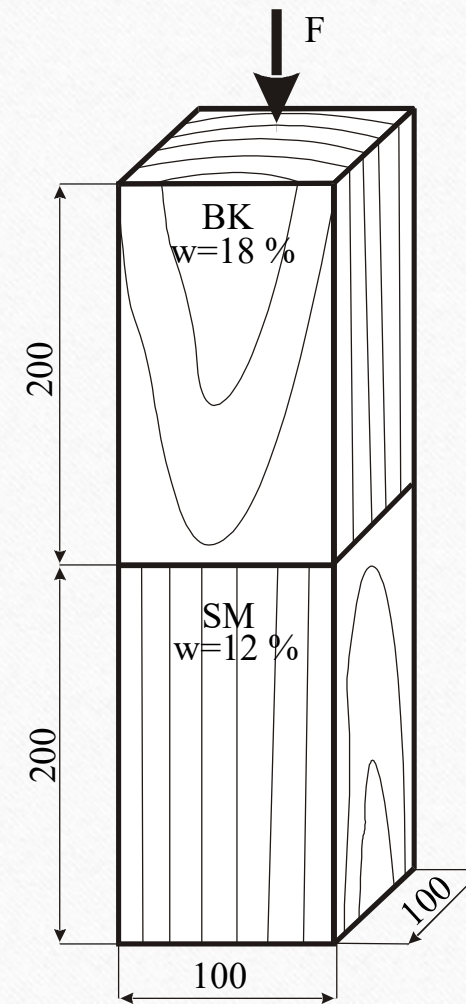
jsou tedy pod mezí úměrnosti.

Příklad č. 8

zatěžování hranolů „za sebou“
tlakovou silou

Jaká bude absolutní deformace a napětí v bukovém a smrkovém hranolu o rozměrech 200×100×100 mm (l×r×t) při 18 % vlhkosti bukového a 12 % smrkového, které jsou umístěné za sebou a zatížené tlakovou silou 250 kN ve směru vláken.

V tomto případě se soustava deformuje tak, že napětí je konstantní v obou hranolech a deformace je rozdílná, což vyplývá z různých modulů pružnosti obou dřevin...



(Do)zadané:

$$E_{12,BK} = 14010 \text{ MPa}$$

$$E_{12,SM} = 9290 \text{ MPa}$$

$$\alpha = 200 \text{ MPa}$$

Řešení:

$$E_{18,BK} = E_{12,BK} - \alpha \cdot (w - 12) = 14010 - 200 \cdot (18 - 12) = 12810 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{18,BK} = \sigma_{12,SM} = \frac{F}{S} = \frac{250000}{100 \cdot 100} = \mathbf{25,0 \text{ MPa}}$$
 (*napětí je cca 74 % z meze pevnosti*

pro smrk, což je ještě pod mezní hranicí 80 % pro tento typ namáhání)

$$\Delta l_{BK} = \frac{\sigma_{18,BK} \cdot l}{E_{18,BK}} = \frac{25 \cdot 200}{12810} \cong \mathbf{0,39 \text{ mm}}$$

$$\Delta l_{SM} = \frac{\sigma_{12,SM} \cdot l}{E_{12,SM}} = \frac{25 \cdot 200}{9290} \cong \mathbf{0,54 \text{ mm}}$$

Příklad č. 9

tahové namáhání,
prodloužení, vliv vlhkosti

Zadání:

Jaké by bylo pružné prodloužení pracovní části normalizovaného dubového tělesa při zatížení v tahu při vlhkosti 12 %, když na porušení při vlhkosti 40 % byla potřebná síla 5000 N?

Sumarizace zadání:

Známe:

$$b = 20 \text{ mm}$$

$$h = 4 \text{ mm}$$

$$l = 90 \text{ mm}$$

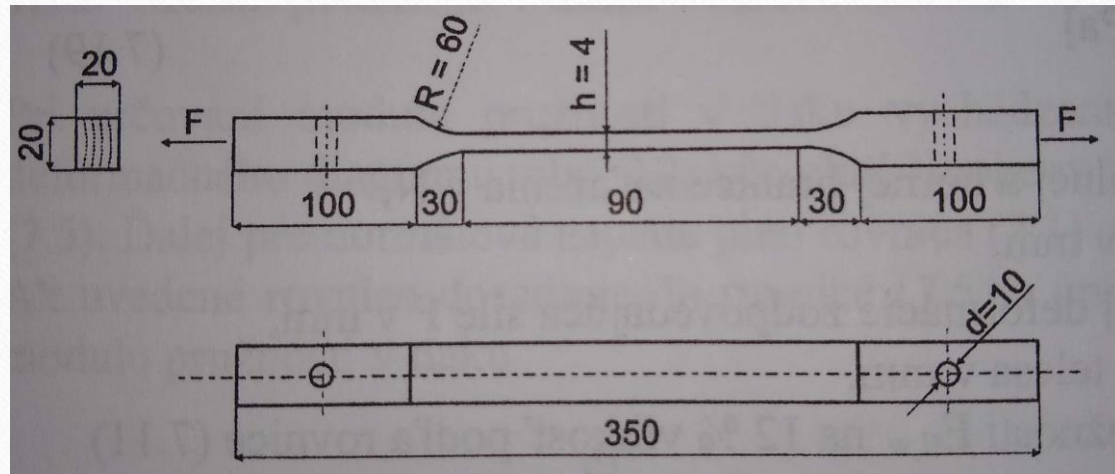
$$F_{40} = 5000 \text{ N}$$

$$E_{12} = 11\,778 \text{ MPa (z literatury)}$$

$$\alpha = 0,015[-] \text{ (z literatury)}$$

Neznáme:

$$\Delta l \text{ (mm)} = ?$$



Řešení:

Vypočítáme pevnost v tahu při vlhkosti 40 % ze vztahu:

$$\sigma_{p,40} = \frac{F_{40}}{b \cdot h} = \frac{5000}{20 \cdot 4} = 62,5 \text{ MPa}$$

Použijeme vzorec pro přepočet pevnosti platný pro rozsah vlhkosti od cca 8 do 20 % i přesto, že vlhkost v našem případě je 40 %. *Nad mezí hygroskopicity (tj. ve dřevě je i volná voda) je pevnost od vlhkosti závislá minimálně a neuvažuje se s ní.*

$$\sigma_{p,12} = \sigma_w \cdot [1 + \alpha(w - 12)] = 62,5 \cdot [1 + 0,015(30 - 12)] \cong \\ \cong 79,4 \text{ MPa}$$

Pro daný typ namáhání a dřevinu budeme uvažovat s mezí úměrnosti na úrovni 70 % z meze pevnosti. Pokud by zadána nebyla, je možné použít spolehlivou hodnotu 50 %.

Potom tedy platí:

$$\sigma_{u,12} = 0,7 \cdot \sigma_{p,12} \cong 55,6 \text{ MPa}$$

Následnou kombinací níže uvedených vztahů, tj. Hookova zákona a vztahu pro poměrnou deformaci si vyjádříme předmětné prodloužení pracovní části vzorku Δl , tedy:

$$\sigma_{u,12} = E_{12} \cdot \varepsilon ; \varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$
$$\Delta l = \frac{\sigma_{u,12} \cdot l}{E_{12}} = \frac{55,6 \cdot 90}{11778} \cong \mathbf{0,42 \text{ mm.}}$$

Poznámka: Pro přepočítání pevnosti by zřejmě bylo vhodnější použít tzv. opravný vlhkostní součinitel K_{30} , který se používá pro rovnovážnou vlhkost rovnou nebo vyšší než BNV, jenže bohužel pro daný typ namáhání a dřevinu není v literatuře dostupný.

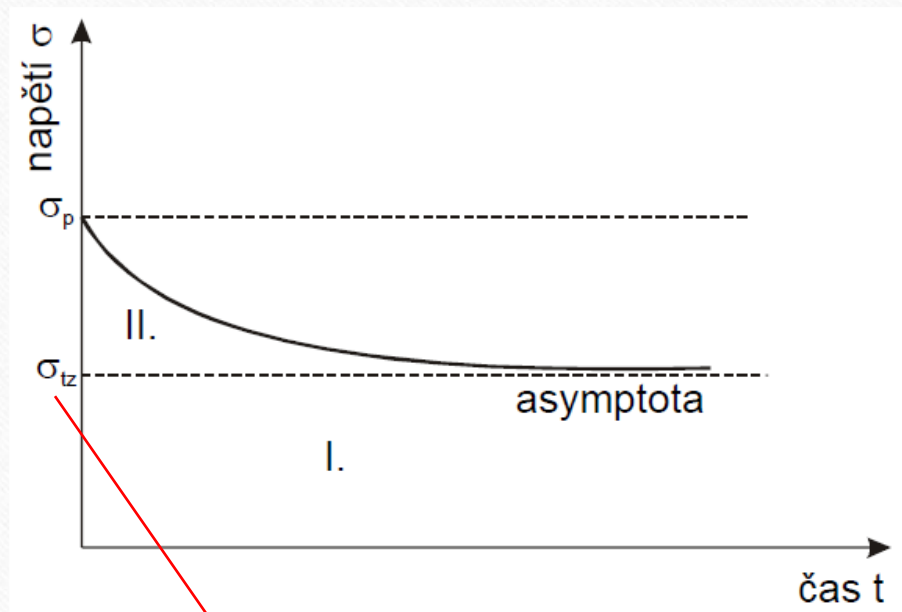
Příklad č. 10

ohybové namáhání (statické,
trvalé)

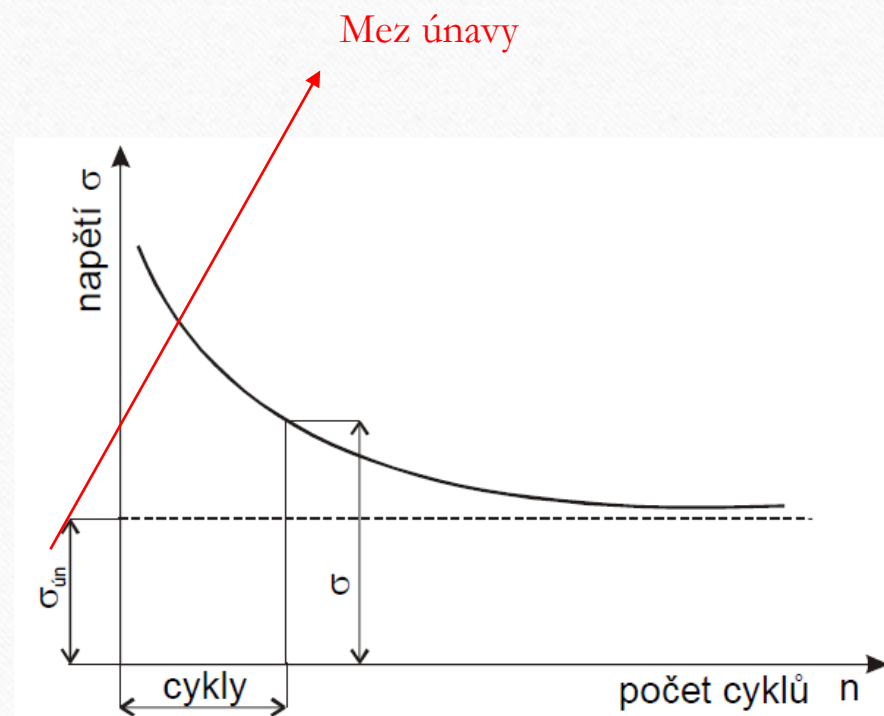
Zadání:

Jaká může být maximální zatěžující síla ve středu podpěr při zatížení ohybem bukového hranolu o vlhkosti 12 % a rozměrech $b \times h \times l_0 = 50 \times 50 \times 1000$ mm, a to při statickém, trvalém konstantním a trvalém kmitavém zatížení, aby se deformoval pouze v rámci pružných deformací. Je dáno, že při vlhkosti 45 % je mez pevnosti bukového dřeva při ohybu 72 MPa. Opravný vlhkostní součinitel K_{30} má hodnotu 1,72.

Pro ilustraci:



Mez trvalé pevnosti



Řešení:

Nejprve přepočítáme pevnost na vlhkostní stav 12 % a zredukujeme napětí pouze na max. možnou úroveň pružnosti, tj.

$$\sigma_{p,12} = \sigma_{p,45} \cdot K_{30} = 72 \cdot 1,72 \cong 123,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{u,12} = 0,65 \cdot \sigma_{p,12} = 0,65 \cdot 123,8 \cong 80,5 \text{ MPa}$$

Následně použijeme vzorec pro napětí při namáhání v trojbodovém ohybu, a vyjádříme si z něho sílu na mezi úměrnosti, což je pro nás hodnota pro max. zatěžující sílu při statickém zatížení.

$$\sigma_{u,12} = \frac{3 \cdot F_{u,12} \cdot l_0}{2 \cdot b \cdot h^2} \Rightarrow$$

$$F_{u,12} = \frac{\sigma_{u,12} \cdot 2 \cdot b \cdot h^2}{3 \cdot l_0} = \frac{80,5 \cdot 2 \cdot 50 \cdot 50^2}{3 \cdot 1000} \cong 6708 \text{ N}$$

Poté můžeme vypočítat hodnotu síly při trvalém konstantním F_{tz} a trvalém kmitavém zatížení $F_{ún}$, přičemž v prvním případě se všeobecně jedná o hodnotu 40 až 60 % ze statického okamžitého zatížení a v druhém o 20 až 40 %.

$$F_{tz} = 0,5 \cdot F_{u,12} \cong 3354 \text{ N}$$

$$F_{ún} = 0,3 \cdot F_{u,12} \cong 2012 \text{ N}$$

Příklad č. 11

vlhkostní a mechanické
namáhání (deformace)

Zadání:

Jakou sílu může vyvinout smrkové dřevo při změně vlhkosti za daných podmínek? Ověřte zdali se jedná o pružnou oblast. Původní obsah vlhkosti dřeva byl na úrovni absolutně suchého stavu. Následně došlo ke změně klimatických podmínek, tj. relativní vlhkost vzduchu vzrostla na 30 % při standardní teplotě 20 °C, přičemž podmínky trvaly tak dlouho, dokud se ve dřevě neustálila rovnovážná vlhkost odpovídající těmto parametrům. Kostka o rozměrech 100×100×100 (v mm) byla uložena mezi dvěma dokonale tuhými deskami a neměla možnost se pohnout v radiálním směru. Zároveň zjistěte, jak se změnila hustota dřeva, pokud uvažujete s tím, že nemožnost deformace v “...” směru neměla vliv na možnou úroveň objemového bobtnání. Kolik vody vlastně přijme? Všechny potřebné parametry uvedeného druhu dřeva odhadněte na základě vašich zkušeností, počínaje jeho hustotou v a.s. stavu. Uvažujte zároveň s obecně udávanými poměry či vztahy.

Sumarizace zadání, resp. co potřebujeme:

Známe:

$$a = 100 \text{ mm}$$

$$w_1 = 0 \%$$

$$w_2 \cong 6 \% \text{ (odhadem)}$$

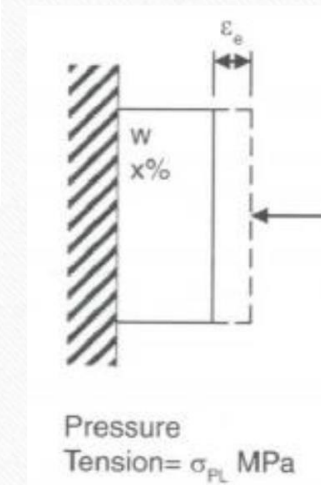
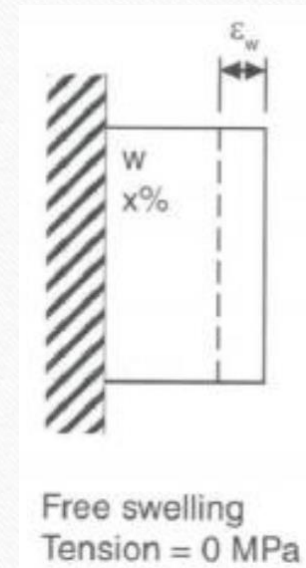
$$w_{BNV} \cong 30 \%$$

$$E_R = 300 \text{ MPa (odhadem, i modul se mění s vlhkostí...)}$$

$$\alpha_R = 5 \% \text{ (odhadem)}$$

$$\rho_0 = 400 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$\text{Neznáme: } F \text{ (N)}, \rho_w \text{ (kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{)}, m_{\text{vody}} \text{ (g)} = ?$$



Řešení:

Úvaha je nedostat se s napětím nad mez kluzu (při tlaku kolmo na vlákna), potom by totiž následující náležitost neplatila.

Jednoznačně by mělo platit to, že vlhkostní deformace se bude rovnat elastické mechanické, tj. rozměrové změny způsobené vlhkostí jsou pružné, a tedy platí:

$$\varepsilon_w = \varepsilon_{el} \rightarrow \frac{\alpha_R}{W_{BNV}} \cdot \Delta W = \frac{\sigma_p}{E_R} ; \sigma_p = \frac{F}{S} ; S = a^2$$

$$F = \frac{\alpha_R \cdot \Delta W \cdot S \cdot E_R}{W_{BNV}} = \frac{0,05 \cdot 6 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 300}{30} = 30000 \text{ N}$$

Napětí při této síle má hodnotu 3,0 MPa, což je pod konvenční mezí pevnosti, resp. mezí úměrnosti v tlaku kolmo na vlákna v radiálním směru pro smrkové dřevo (v literatuře se uvádí hodnota 3,4 MPa).

Dále využijeme vzorec pro vztah mezi hustotou dřeva v absolutně suchém stavu a při dané vlhkosti, plus empirický vztah pro objemové bobtnání, tj.

$$\rho_w = \rho_0 \cdot \frac{1 + w}{1 + \alpha_V \cdot \frac{w}{w_{BNV}}} = 400 \cdot \frac{1 + 0,06}{1 + 0,28 \cdot 0,4 \cdot \frac{6}{30}} \cong 415 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

Následně můžeme vypočítat hmotnost dřeva ze vztahu:

$$\rho_w = \frac{m_w}{V_w} \Rightarrow m_w = \rho_w \cdot V_w = 415 \cdot \frac{100^3}{10^9} = 0,415 \text{ kg} = 415 \text{ g}$$

Zvýšením vlhkosti tato kostka dřeva přibere následující množství vody:

$$\begin{aligned} m_{\text{vody}} &= m_w - m_0 = m_w - \frac{m_w}{1 + w_a} = \frac{m_w \cdot w_a}{1 + w_a} = \frac{415 \cdot 0,06}{1 + 0,06} \cong \\ &\cong 23,5 \text{ g} \end{aligned}$$

Příklad č. 12

tlakové namáhání

Zadání:

Jaké plošné rozměry v cm by muselo mít zkušební těleso ze dřeva, aby se tlakovou silou 96 kN dosáhlo napětí ve výši 60 MPa?

Sumarizace zadání:

Známe:

$$F = 96 \text{ kN}$$

$$\sigma = 60 \text{ MPa}$$

Neznáme:

$$S[\text{cm}^2] = ?, \text{ resp. } a, b[\text{mm}] = ?$$

Řešení:

Použijeme vzorec pro výpočet napětí při tlakovém namáhání, tj.

$$\sigma[\text{MPa}] = \frac{F[\text{N}]}{S[\text{mm}^2]}$$

Pro plochu tedy platí:

$$S[\text{mm}^2] = \frac{F[\text{N}]}{\sigma[\text{MPa}]} = \frac{96000}{60} = 1600 \text{ mm}^2 = 16 \text{ cm}^2$$

Rozměry tedy mohou být například:

$$\mathbf{a = b = 4 \text{ cm}}$$

Příklad č. 13

rozměrové změny způsobené
bobtnáním dřeva

Zadání:

Zjistěte tangenciální rozměr desky ze dřeva za těchto podmínek:

- původní tangenciální rozměr je 25 cm,
- koeficient celkového podélného bobtnání je 0,6 ‰,
- změnila se jeho absolutní vlhkost z 10 na 25 ‰.

Pro všechny ostatní údaje uvažujte obecně udávané hodnoty, poměry a vztahy.

Sumarizace zadání:

Známe:

$$t_1 = 25 \text{ cm}$$

$$\alpha_l = 0,6 \%$$

$$w_{a1} = 10 \%$$

$$w_{a2} = 25 \%$$

Neznáme:

$$t_2 [\text{mm}] = ?$$

Řešení:

Dřevo bobtná v celém rozsahu „hygroskopicity“, což je od 0 do tzv. meze hygroskopicity (cca průměrně 30 %). Bobtnání na 1 % změny vlhkosti je tedy v každém případě 1/30. Vlhkost dřeva se změnila z 10 na 25%, tj. polovinu z rozsahu meze hygroskopicity. Využijeme i známý poměr bobtnání v jednotlivých směrech a dopočítáme % bobtnání v tangenciálním směru.

Platí tedy:

$$\alpha_{15,l} = \frac{\alpha_l}{w_{MH}} \cdot (w_{a2} - w_{a1}) = \frac{0,6}{30} \cdot (25 - 10) = 0,3 \%$$

$$tg:rad:l = 20:10:1 = 6,0:3,0:0,3 \rightarrow \alpha_{15,tg} = 6,0 \%$$

Nyní už můžeme vypočítat rozměrovou změnu desky v tangenciálním směru:

$$t_2 = t_1 \cdot (1 + \alpha_{15,tg}) = 25 \cdot (1 + \mathbf{0,06}) = \mathbf{26,5\ cm}$$

Pozor na práci s procenty! V příkladech si dávejte pozor i na jednotky, převody jednotek, související řády, apod. Chyby způsobené takovouto nepozorností jsou potom opravdu drastické...

Příklad č. 14

rozměrové změny způsobené
sesycháním dřeva

Zadání:

Zjistěte tangenciální rozměr dřevěné fošny za daných podmínek. Fošna byla umístěna do prostředí klimatizační komory s konstantními parametry relativní vlhkosti vzduchu 65% a teplotou 20 °C do ustálení své rovnovážné vlhkosti, přičemž její rozměr po šířce byl 20,8 cm . Následně byla vložena do sušárny a vysušena do absolutně suchého stavu. Zjistěte její „nový“ rozměr šířky, když poznáte hodnotu její hustoty v absolutně suchém stavu, a to 650 kg/m³. Pro všechny ostatní potřebné údaje uvažujte obecně udávané hodnoty a vztahy, viz sumarizace zadání.

Sumarizace zadání:

Známe:

$$\rho_0 = 650 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$t_1 = 20,8 \text{ cm}$$

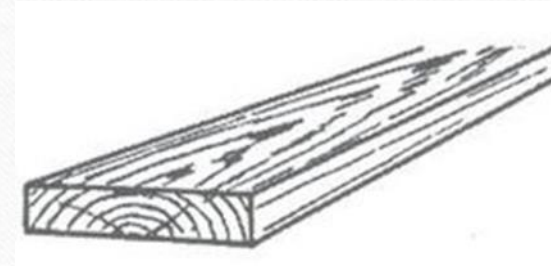
$W_{65/20} = W_{a1} = 12 \%$ (při parametrech prostředí 65/20 se ve dřevě ustálí cca tato rovnovážná vlhkost)

$$W_{a2} = 0 \%$$

$$W_{MH} = 30 \%$$

$\alpha_T = 17 \cdot \rho_0 [\%]$ (platí pro bobtnání, použijeme zjednodušeně přepočtem i pro sesychání)

Neznáme: $t_2 [\text{cm}] = ?$



Řešení:

Jedná se o jednoduchou obdobu předchozího příkladu, takže platí:

$$\begin{aligned}t_2 &= t_1 \cdot \left(1 + \frac{w_{a2} - w_{a1}}{w_{MH}} \cdot \beta_T \right) = \\&= t_1 \cdot \left(1 + \frac{w_{a2} - w_{a1}}{w_{MH}} \cdot \frac{1 \cdot \alpha_T}{1 + \alpha_T} \right) = \\&= t_1 \cdot \left(1 + \frac{w_{a2} - w_{a1}}{w_{MH}} \cdot \frac{1 \cdot \mathbf{0,17} \cdot \rho_0}{1 + \mathbf{0,17} \cdot \rho_0} \right) = \\&= 20,8 \cdot \left(1 + \frac{0 - 12}{30} \cdot \frac{1 \cdot 0,17 \cdot 0,650}{1 + 0,17 \cdot 0,650} \right) \cong \mathbf{20,0 \text{ cm}}\end{aligned}$$

Pozor: nedosazujeme procenta.

Příklad č. 15

vlhkost dřeva, hmotnost dřeva
v absolutně suchém stavu

Zadání:

Zjistěte kolik je sušiny, resp. jaká je hmotnost v a.s. stavu, dřeva o hmotnosti 5 tun, když víte že:

1. jeho absolutní vlhkost je 100 %,
2. jeho relativní vlhkost je 50 %.

Sumarizace zadání:

Známe:

$$m_w = 5 \text{ t} = 5000 \text{ kg}$$

$$w_{a1} = 50 \%$$

$$w_{r2} = 100 \%$$

Neznáme:

$$m_{01}[\text{kg}], m_{02}[\text{kg}] = ?$$

Řešení:

1. Využijeme vzorec pro absolutní vlhkost dřeva (podíl vody ve dřevě a hmotnosti dřeva v a.s. stavu), tj.

$$w_{a1} = \frac{m_w - m_{01}}{m_{01}}$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme hmotnost dřeva v a.s. stavu, tj.

$$m_{01} = \frac{m_w}{1 + w_a} = \frac{5000}{1 + 1,0} = 2500 \text{ kg}$$

2. Využijeme vzorec pro relativní vlhkost dřeva (podíl vody ve dřevě a vlhkého dřeva), tj.

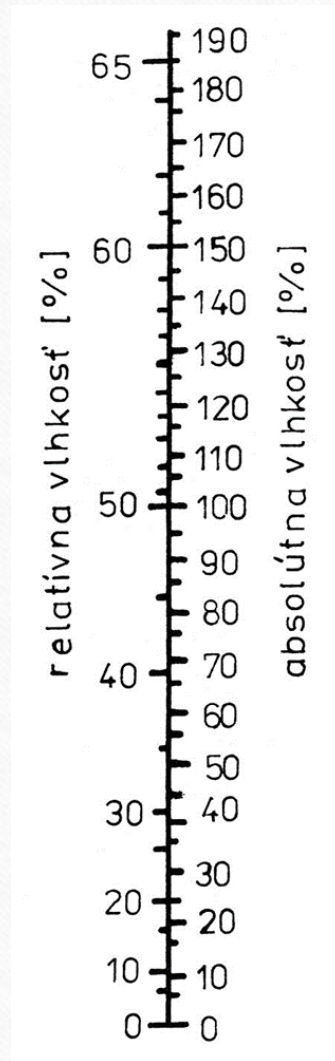
$$w_{r2} = \frac{m_w - m_{02}}{m_w}$$

Z tohoto vztahu si vyjádříme hmotnost dřeva v a.s. stavu, tj.

$$m_{02} = m_w \cdot (1 - w_{r2}) = 5000 \cdot (1 - 0,5) = 2500 \text{ kg}$$

*Proč je v obou případech totožná
hmotnost dřeva v a.s. stavu?*

Je to pochopitelné...



Neřešené příklady

praktická kontrola pochopení
základních typových příkladů

1. Máme 1 m^3 dřeva o vlhkosti 10 %, při které má hustotu 550 kg/m^3 . Kolik vody přijme, když dosáhne stav vlhkostní rovnováhy v prostředí s relativní vlhkostí vzduchu blížíící se 100 % a teplotou $20 \text{ }^\circ\text{C}$? *(výsledek: 100 kg)*
2. Kolik tepla v GJ spotřebujeme na ohřátí 10 m^3 dřeva o vlhkosti 35 % při zvýšení teploty z 10 na $90 \text{ }^\circ\text{C}$? Uvažujte s hustotou v a.s. stavu $0,600 \text{ g/cm}^3$, měrnou tepelnou kapacitou vody $4182 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$ a měrnou tepelnou kapacitou a.s. dřeva $1,682 \text{ kJ/kg}\cdot\text{K}$. *(výsledek: cca 1,3 GJ)*

3. Jakou silou v tlaku v MN na by se muselo působit na zkušební těleso ze dřeva při vlhkosti 7 % o plošných rozměrech 2 cm × 0,4 m, aby se dosáhlo takového napětí, které by bylo při vlhkosti 12 % ve výši 50 MPa? Použijte opravný vlhkostní součinitel 0,04. O kolik mm by byl jiný rozměr 0,4 m při těchto dvou vlhkostních stavech, pokud byste věděli, že se jedná o rozměr v tangenciálním směru? Uvažujte s obecně udávanou hodnotou bobtnání dřeva v tomto směru. *(výsledek: 0,5 MN; 6 mm při uvažování hodnoty bobtnání v tang. směru 9 % v celém rozsahu meze hygroskopicity)*

4. Jaké bude stlačení (absolutní deformace) a napětí v kostce ze dřeva o hraně 100 mm při zatížení tlakovou silou 0,3 MN ve směru vláken. Uvažujte s hodnotou modulu pružnosti 10 GPa. Určete, zdali se jedná o pružnou deformaci, pokud víte, že mez pevnosti je 62 MPa.
(výsledek: 0,3 mm; 30 MPa; ano)

POUŽITÁ LITERATURA

- Babiak, M., Dubovský, J. (2001). Problémy z mechanických vlastností dreva: vysokoškolská príručka, Technická univerzita vo Zvolene, 71 s. ISBN 80-228-1076-2.
- Borůvka, V., Babiak, M. (2016). Vlastnosti dřeva v příkladech, Praha ČZU, 139 s. ISBN 978-80-213-2618-7.
- Hrčka, R.; Lagaňa, R. (2013). Wood properties (in tasks), Zvolen: Technical University in Zvolen, 84 s. ISBN 978-80-228-2494-1.
- Požgaj, A., Chovanec, D., Kurjatko, S., Babiak, M. (1997). Štruktúra a vlastnosti dreva, Príroda a.s., Bratislava, 485 s. ISBN 80-07-00600-1.

Název: Řešené příklady z fyzikálních a mechanických vlastností dřeva
Autoři: doc. Ing. Vlastimil Borůvka, PhD., Dipl. Mgmt.
Vydavatel: Česká zemědělská univerzita v Praze
Určeno: pro posluchače FLD
Povoleno: ediční radou FLD
Tisk: elektronická verze
Náklad: -
Počet stran: 93
Doporučená cena: -
Vydání: revize prvního vydání
Rok vydání: 2022





Fakulta lesnická
a dřevařská

Řešené příklady z fyzikálních a mechanických vlastností dřeva

doc. Ing. Vlastimil Borůvka, PhD., Dipl. Mgmt.



Verze ze dne: 05.12.2022